مبادئ الاستدلال الإحصائي

تأليف

الدكتور أنيس إسماعيل كنجو

الدكتور عبد الحميد عبد الله الزيد

الدكتور عبد الرحمن سليمان الرزيزاء

جامعة الملك سعود

إدارة النشر العلمي والمطابع

بسم الله الرحمن الرحيم

مبادئ
الاستدلال الإحصائي

تأليف

الدكتور أنيس إسماعيل كنجو

الدكتور عبد الحميد عبد الله الزيد

الدكتور عبد الرحمن سليمان الرزيزاء

قسم الإحصاء وبحوث العمليات – كلية العلوم

جامعة الملك سعود

النشر العلمي والمطابع - جامعة الملك سعود

ص.ب ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ - المملكة العربية السعودية

ⓒ جامعة الملك سعود، ١٤٢٦هـ (٢٠٠٥م)

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

كنجو، أنيس إسماعيل

مبادئ الاستدلال الإحصائي/أنيس إسماعيل كنجو؛ عبد الحميد عبد الله الزيد؛ عبد الرحمن سليمان الرزيزاء- الرياض، ١٤٢٦هـ.

٢٥٠ص؛ ١٧سم ×٢٤سم

ردمك: ٧-٨٦٦-٣٧-٩٩٦٠

١-الاستدلال الإحصائي أ- الزيد، عبد الحميد عبدالله (مؤلف مشارك)

ب - الرزيزاء، عبد الرحمن سليمان (مؤلف مشارك) ج- العنوان

ديوي ٥١٩,٥٤ ١٤٢٦/٣٠٧٩

رقم الإيداع: ١٤٢٦/٣٠٧٩

حكمت هذا الكتاب لجنة متخصصة شكلها المجلس العلمي بالجامعة، وقد وافق المجلس العلمي على نشره، بعد الاطلاع على تقارير المحكمين، في إجتماعه الثاني والعشرين للعام الدراسي ١٤٢٤/١٤٢٥هـ، المنعقد بتاريخ ١٤٢٥/٤/٢٨هـ الموافق ٢٠٠٤/٦/١٦م.

النشر العلمي والمطابع ١٤٢٦هـ

مقدمة

الحمد لله وحده والصلاة والسلام على من لا نبي بعده سيدنا محمد بن عبد الله الرسول الأمين والمبعوث رحمة للعالمين، وبعد فهذا كتاب جديد نضيفه إلى المكتبة العربية في ميدان العلوم الإحصائية وتشكل محتوياته الجرعة الأولى التي يتلقاها طالب الإحصاء عادة في مجال الاستدلال الإحصائي. وقد نشأ الكتاب كتطوير لمذكرة استخدمت في تدريس مقرر مبادئ الاستدلال الإحصائي الذي يقدمه قسم الإحصاء وبحوث العمليات في جامعة الملك سعود. ولما كان الطالب في حاجة إلى معرفة مبادئ نظرية التوزيعات، فقد جاء **الفصل الأول** كتمهيد لابد منه يجعل الطالب مؤهلا لكتابة التوزيع المشترك لمشاهدات عينة عشوائية والتعامل مع خواص أساسية مثل الاشتراط، الاستقلال والتغاير. وينبغي الاقتصاد في الوقت المخصص لهذا الفصل، فلا يخصص المدرس له أكثر من أسبوعين. وبالتالي قد يجد المدرس نفسه مضطرا لاختيار أهم ما يتضمنه الفصل وتمس له الحاجة في الفصول اللاحقة. ويركز **الفصل الثاني** على مفهومين أساسيين هما فضاء المعالم وفضاء المعاينة، ويقدم العينة العشوائية وتوزيعها المشترك وأهم خواصها كالمتوسط والانحراف المعياري ويوضح الدور الكبير لهذين الإحصاءين في مسائل الاستقراء الإحصائي، من خلال قانون الأعداد الكبيرة، ونظرية النهاية المركزية. ويستثمر قانون الأعداد الكبيرة احتماليا لتقديم مسوغ نظري

لاعتماد التكرار النسبي لحادثة كتفسير عملي لاحتمال هذه الحادثة، كما يستثمره إحصائيا لإيضاح الدور المميز الذي يلعبه متوسط العينة في مسألة تقدير متوسط المجتمع الذي جاءت منه هذه العينة. وتأتي نظرية النهاية المركزية لتستكمل هذه المهمة فتقدم توزيعا لمتوسط العينة في حالة عينات كبيرة يجعل من الممكن استخدامه على نطاق واسع في تطبيقات الإحصاء. وينبغي التركيز على أهمية النظرية من الناحية التطبيقية أكثر من التركيز على اشتقاقها الرياضي، مما تجري تغطيته عادة في مقررات نظرية الاحتمال. ومن الواضح أن الفصل الثاني يزخر بمجموعة من المفاهيم التي تلعب دورا جوهريا في نظرية الإحصاء، وينبغي للطالب أن يخرج منه بإدراك واضح لهذه المفاهيم. وإذا كان الفصل الثاني يركّز على متوسط العينة فإن **الفصل الثالث** يركّز على توزيعات المعاينة مربع كاي وتي وإف، في حالة عينات صغيرة الحجم مأخوذة من مجتمع طبيعي. ويجدر التنبيه هنا إلى أن الاشتقاق الرياضي لعبارة كل توزيع تأتي في الدرجة الثانية من الأهمية، فالمهم بالدرجة الأولى توظيفها كتوزيعات معاينة إحصائية، وتوضيح صلة كل منها بمقادير محسوبة بدلالة الإحصاءين المهمين، متوسط العينة وانحرافها المعياري أحدهما أو كليهما. وإذا لم يساعد الوقت فيمكن الاكتفاء بعرض مخطط عام لاستنباط العبارة الرياضية لكل توزيع، أو القفز على بعضها وإعطائها بدون برهان. ويشكل **الفصل الرابع** زبدة المقرر الذي يغطيه هذا الكتاب الدراسي، وسيكون من المؤسف أن تستهلك الفصول الثلاثة الأولى أكثر مما هو مخصص لها مما قد يؤدي إلى تغطية مادة الفصل الرابع بسرعة دون أن تعطى حقها من العناية والتدريب. ويقدم الفصل الرابع مبادئ نظرية التقدير النقطي، ويوضح الخواص الأساسية المرغوبة لمقدر، ويستثمر بوضوح المفاهيم التي أرسيت في الفصول السابقة. وينحو العرض في هذا الفصل منحىً طرائقيا، إلا في القليل مما يمكن تغطيته نظريا،

مثل متباينة كرامير راو، واستخدامها لإيجاد تقدير غير منحاز أمثل لمعلمة. أما مفهوم الكفاية فيجري تقديمه بصورة مبسطة لا تخل بالدقة، كما نقدم التكميم العملي الناجح الذي ابتكره فيشر لمفهوم مجرد هو مفهوم المعلومات التي تتضمنها العينة حول معلمة. ويتناول **الفصل الخامس** فترات الثقة والتي هي تقدير بفترة عن المعلمة. ويعرض هذا الفصل فترات الثقة بصورة مبسطة، حيث اقتصر على تقديم مفهوم الثقة مع بعض الأمثلة الشائعة لفترات ثقة مرتبطة بتوزيعات معاينة لمجتمعات طبيعية أو ثنائية. كما تطرق لكيفية حساب فترات الثقة عند أخذ عينات كبيرة. أما **الفصل السادس** وهو الأخير فقد خصص لدراسة اختبار الفرضيات كتطبيق لنتائج الفصلين الرابع والخامس، وقد اقتصر على تقديم المبادئ الأساسية لاختبار الفرضيات مثل نوعي الخطأ ودالة القوة وأفضل الاختبارات مع تطبيقاتها على بعض الأمثلة، خصوصا المتعلقة بالمجتمعات الطبيعية.

وما أغفله الكتاب من التغطية النظرية، وتقديم عدد من النظريات بدون برهان، كان مقصودا لأن مثل هذه التغطية تتم عادة في مقرر لاحق يأخذه الطالب في نظرية الإحصاء، ويشمل نظريتي التقدير واختبار الفرضيات. وتجدر الإشارة إلى أن الفصلين الخامس والسادس غير مطلوبين إلى الحد المتعلق بمحتويات مقرر مبادئ الاستدلال الإحصائي، وقد أضفناهما كي يكون محتوى الكتاب معبرا بصورة أكمل عن موضوع الكتاب ككتاب في الاستدلال الإحصائي. ويمكن الاستفادة من هذين الفصلين في مقرر لاحق.

ولما كان المقرر الذي يغطيه هذا الكتاب مقررا أساسيا في إعداد طالب بكالوريوس الإحصاء، فإننا نرجو ونأمل أن نكون قد وفقنا، بعون الله، إلى تقديم زاد علمي، تم تصميمه بعناية ودقة، بحيث يحقق الهدف من المقرر، ويشكل، إن شاء الله،

عونا للمدرس يغنيه عن اعتماد كتاب باللغة الإنكليزية ، ومنهلا سهلا وميسرا للطالب يقدم له المعارف التي ينشدها بلغته الأم.

ويتميز الكتاب بعدد وافر من الأمثلة والتمارين التي تم اختيارها بعناية لتسهم في توضيح الأفكار والمفاهيم التي يقدمها الكتاب. وفي الختام نرجو أن يجود علينا الزملاء الذين يستخدمون الكتاب بملاحظاتهم لأخذها في الاعتبار في طبعة قادمة ، إن شاء الله ، كما نرجو من أبنائنا الطلبة الدعاء لنا ولوالدينا ، ونسأل الله جلت قدرته ، وهو أعلم بنوايانا ومقاصدنا من مثل هذا الجهد العلمي المتواضع ، أن يتقبله منا عملا صالحا لوجهه الكريم.

المؤلفون

المحتويات

صفحة

الفصل الثاني : العينات العشوائية

الفصل الثالث: توزيعات العينات الصغيرة

الفصل الرابع: مبادئ أساسية في التقدير

الفصل الأول

بعض الخواص البسيطة لتوزيع احتمالي

(١-١) مقدمة

نعلم أنه يمكن التعبير عن توزيع احتمالي من خلال دالة كثافة احتمالية أو دالة احتمال. إلا أن الوصف الكامل للتوزيع الاحتمالي يحتاج فيما يحتاجه إلى أكثر من ذلك. وغالبا ما نرغب في الحصول على عددين يشيران إلى الموضع الذي يتمركز عنده التوزيع، وإلى كيفية انتشار التوزيع حول هذا الموضع.

(١-٢) المتوسط أو التوقع

معظم الخواص التي تشكل موضوعا للدراسة الإحصائية هي من نوع المتوسطات، ويوجد سببان لذلك، والسبب الأول هو أنه عندما نأخذ عينة كبيرة ونحسب متوسطها فإنه يمكن اعتبار هذا المتوسط كتقريب لمتوسط المجتمع الذي جاءت منه العينة، أو لمتوسط التوزيع الاحتمالي الذي يصف هذا المجتمع. والسبب الثاني هو أن المتوسطات تتميز بأنها أكثر سهولة وقابلية للمعالجة الرياضية. ويدعى متوسط توزيع احتمالي التوقع، وسنناقش في هذه الفقرة التوقعات.

وتوضيحا لفكرة التوقع لنفرض أننا قمنا بقياس متغير عشوائي X، عددا من المرات يساوي N (مثلا، قسنا أطوال N من طلاب الجامعات) فحصلنا على N من

القياسات ثم صنّفنا القياسات المختلفة وتكرار ظهور كل منها فوجدنا الجدول التالي:

التكرار النسبي $\frac{f_i}{N}$	التكرار f_i	القياس x_i
f_1/N	f_1	x_1
f_2/N	f_2	x_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
f_m/N	f_m	x_m

حيث $\sum_{i=1}^{m} f_i = N$ و $\sum_{i=1}^{m} \frac{f_i}{N}=1$. ومتوسط هذه القياسات كما نعلم هو:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} \frac{f_i x_i}{N} = \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{f_i}{N} \qquad (١)$$

أي نضرب كل قيمة من القيم المختلفة التي حصلنا عليها بتكرارها النسبي فنحصل على المتوسط الحسابي البسيط للقياسات الـ N. وإذا كانت N كبيرة جدا فإن التكرار النسبي للقيمة x_i يصبح تقريبا جيدا لاحتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X القيمة x_i أي تقريبا جيدا لقيمة دالة الاحتمال $f(x) = P(X = x)$ الخاصة بهذا المتغير العشوائي عند القيمة x_i، أو $f(x_i)$. وعندما نعرّف القيمة المتوقعة أو توقع متغير عشوائي X، دالة احتماله $f(x)$، ونرمز لهذا التوقع بالرمز $E(X)$، على الشكل:

$$E(X) = \sum_{x} x\, f(x) \qquad (٢)$$

حيث $\sum_{x}$ تعني المجموع فوق جميع القيم الممكنة للمتغير X.

إن مفهوم التوقع يبدو بوضوح وكأنه تجريد رياضي لفكرة المتوسط الحسابي، حيث حلّ $f(x_i)$، احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X القيمة x_i، محل التكرار النسبي لظهور القيمة x_i.

مثال (١)

نرمي حجر نرد متوازن ونسجل عدد النقاط التي تظهر على الوجه العلوي. إذا أعدنا هذه "التجربة" عددا كبيرا من المرات، وليكن 6000 مرة، فقد نحصل، على وجه التقريب، على العدد 1 ألف مرة، وعلى العدد 2 ألف مرة، إلخ. وسيكون مجموع الأعداد التي نسجلها على وجه التقريب:

$$\{1(1000) + 2(1000) + ... + 6(1000)\}$$

ومتوسط هذه الأعداد هو:

$$\frac{1}{6000}\{1000 + 2(1000) + \ldots + 6(1000)\}$$
$$= \left\{1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + \ldots + 6\left(\frac{1}{6}\right)\right\} = 3.5$$

وهو يساوي تماما مجموع جداءات النتائج الممكنة باحتمالاتها المقابلة.

مثال (٢)

في المثال السابق، لنفرض أن متبرعا محسنا سيدفع عددا من الريالات يساوي مربع عدد النقاط، فيجب أن نتوقع ريعا للرمية الواحدة مساويا:

$$E(X^2) = \left\{1\left(\frac{1}{6}\right) + 2^2\left(\frac{1}{6}\right) + \ldots + 6^2\left(\frac{1}{6}\right)\right\} = \frac{91}{6} = 15.167$$

لنفرض، بصورة عامة، أن X متغير عشوائي منفصل دالة احتماله $f(x)$، ولتكن $g(x)$ أي دالة حقيقية في X، فنعرّف، بصورة مشابهة لما رأيناه في المثال السابق توقع $g(x)$ على الشكل:

$$E\{g(X)\} = \sum_x g(x) f(x) \qquad (٣)$$

وإذا كان للمتغير X توزيع مستمر دالة كثافته $f(x)$ فنعرّف عندئذ القيمة المتوسطة أو توقع المتغير العشوائي $g(X)$ على الشكل:

$$E\{g(X)\}=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx \qquad (٤)$$

(١-٣) خواص التوقع

نقدم فيما يلي موجزا سريعا لخواص التوقع وبدون برهان.

(أ) إذا كان c عددا ثابتا فإن

$$E\{c\} = c \qquad (٥)$$

(ب) إذا كان c عددا ثابتا و$g(X)$ أي دالة في متغير عشوائي X، فعندئذ:

$$E\{c\, g(X)\} = c\, E\{g(X)\} \qquad (٦)$$

(جـ) إذا كانت $g_1(X)$ و$g_2(X)$ دالتين في متغير عشوائي X فعندئذ:

$$E\{g_1(X) + g_2(X)\} = E\{g_1(X)\} + E\{g_2(X)\} \qquad (٧)$$

ومن (٦) و (٧) نجد، حيث c_1، و c_2 أي عددين ثابتين:

$$E\{c_1\, g_1(X) + c_2\, g_2(X)\} = c_1\, E\{g_1(X)\} + c_2\{E\, g_2(X)\} \qquad (٨)$$

(١-٤) المتوسط والتباين

سنستعرض في هذه الفقرة بعض الخواص البسيطة التي تشير إلى الموضع الذي يتمركز عنده التوزيع، وإلى كيفية انتشار التوزيع حول هذا المركز. ليكن X متغيرا عشوائيا فمقياس التمركز الأكثر استخداما لتوزيع X هو المتوسط، ونرمز له عادة بالرمز μ:

$$\mu = E(X) \qquad (٩)$$

ونرى بسهولة أن μ يمثل "قيمة مركزية" للتوزيع، ذلك لأننا إذا حسبنا القيمة المتوسطة لانحراف X عن μ فسنجد:

$$E\{X - \mu\} = E(X) - E(\mu) = \mu - \mu = 0 \quad (١٠)$$

أي أن الانحراف الموجب يوازن الانحراف السالب بحيث تصبح القيمة المتوسطة للانحراف صفرا. وفي الحقيقة فإن μ هي النقطة الوحيدة التي يكون متوسط الانحراف حولها صفرا.

وإذا كان التوزيع متناظرا حول نقطة، a ، مثلا، فعندئذ يكون متوسط التوزيع، في حال وجوده، مساويا a، وللبرهان نفرض $Y = X - a$ وأن دالة كثافة Y هي $f(y)$، فمن خاصة التناظر حول a لدينا من أجل أي عدد ثابت c، $f_X(a + c) = f_X(a - c)$ أو $f_Y(y) = f_Y(-y)$ ومنه:

$$E\{Y\}=\int_{-\infty}^{+\infty} y\,f(y)dy=\int_{-\infty}^{0} y\,f(y)dy+\int_{0}^{+\infty} y\,f(y)dy$$

وبإجراء التحويل $y = -t$ في التكامل الأول نجد:

$$E\{Y\} = -\int_{0}^{\infty} t\,f(t)\,dt + \int_{0}^{\infty} y\,f(y)\,dy = 0$$

أي أن $E\{X - a\} = 0$ أو $E\{X\} = a$. وهذا يثبت أن متوسط التوزيع هو a، شريطة أن يكون التكامل موجودا.

ونأخذ كمقياس للانتشار تباين X، ونرمز له عادة بالرمز σ_X^2 أو $Var(X)$، أو $V(X)$ ونعرفه بالعلاقة:

$$\sigma_X^2=V(X)=E\{(X-\mu)^2\} \quad (١١)$$

وهو القيمة المتوسطة لمربع انحراف X عن متوسطه μ. ويسمى الجذر التربيعي للتباين بالانحراف المعياري σ، وهو موجب دوما:

$$\sigma = \sqrt{E\{(X - \mu)^2\}} \quad (١٢)$$

لنأخذ الآن التحويل الخطي $Y = aX + b$ فيمكن بسهولة إثبات أن:

$$\mu_Y = E(a X + b) = a E(X) + b = a\mu_X + b \quad (١٣)$$

$$\sigma_Y^2 = a^2\ \sigma_X^2 \qquad (١٤)$$

مثال (٣)

نستخدم المعلمتين μ و σ^2 عند مناقشة التوزيع الطبيعي. ونبرر الآن استخدامنا لهذه الرموز بالذات بتبيان أن μ و σ^2 هما متوسط وتباين التوزيع، على الترتيب.

نعلم أن توزيع المتغير المعياري $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ هو التوزيع الطبيعي المعياري، وهو توزيع متناظر حول الصفر كما نعلم، أي أن $E\{Y\}=0$، ولحساب التباين نكتب:

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} y e^{-\frac{1}{2}y^2}\,d\left(\frac{1}{2}y^2\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} y\,d\left(-e^{-\frac{1}{2}y^2}\right)$$

وبتطبيق التكامل بالتجزئة نجد:

$$\sigma_Y^2 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left[-y e^{-\frac{1}{2}y^2}\right]_0^{\infty} + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy\right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy = 1$$

وبما أن $X=\sigma Y+\mu$ فلدينا من (١٣) و (١٤):

$$\mu_X = \sigma\,\mu_Y + \mu = \sigma \times 0 + \mu = \mu$$

$$\sigma_X^2 = \sigma^2 . \sigma_Y^2 = \sigma^2 . 1 = \sigma^2$$

(١-٥) متباينة تشيبيشيف

توضح هذه المتباينة كيف يتحكم التباين، إلى حد ما، بكيفية انتشار الاحتمال، فالتباين الصغير لمتغير X يعني أن معظم قيم X تتوضّع قريبا من المتوسط μ، وهذا بدوره

يعني أن احتمال أن يأخذ X قيمة قريبة من المتوسط هو احتمال عال. وتعبر متباينة تشيبيشيف عن هذه الأفكار بصورة رسمية، وبطريقة رياضية دقيقة. والمتباينة في حالة متغير عشوائي X متوسطه μ وتباينه σ^2 هي :

$$P\{|X-\mu|>k\sigma\}<\frac{1}{k^2} \qquad (١٥)$$

وتقول هذه العبارة الاحتمالية إن كمية الاحتمال المنتشرة في نقاط تبعد عن المتوسط μ بأكثر من k انحراف معياري يجب أن يقل عن $\frac{1}{k^2}$.

وبأخذ $k = 2,3$ نجد أن احتمال الابتعاد عن المتوسط بأكثر من انحرافين معيارين هو حتما أقل من 0.250، واحتمال تجاوز ثلاث انحرافات معيارية ابتعادا عن المتوسط يجب أن يكون أقل من 0.111 . وإذا كان توزيع المتغير X طبيعيا يصبح هذان الاحتمالان، على الترتيب، 0.045 و0.003، أي أن الحدود التي تضعها متباينة تشيبيشيف هي حدود فضفاضة، ولا بد أن يكون التوزيع على درجة غير قليلة من عدم التناظر، أو الابتعاد عن الطبيعية قبل أن يصبح هذان الاحتمالان قريبين من حدود متباينة تشيبيشيف. وبعبارة موجزة فإن حدود متباينة تشيبيشيف متحفظة جدا.

(١-٦) العزوم

لو نظرنا في تعريف المتوسط لمتغير عشوائي مستمر :

$$\mu=E\{X\}=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx \qquad (١٦)$$

لوجدنا أنه مشابه تماما لما يُدعى عادة في الفيزياء "العزم الأول". وقياسا على ذلك نعرّف هنا العزم من المرتبة k على الشكل :

$$\mu'_k=E\{X^k\}=\begin{cases}\sum_k x^k f(x) & \text{إذا كان X منفصلا}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\, dx & \text{إذا كان X مستمرا}\end{cases} \qquad (١٧)$$

حيث $k = 1,2,...$. وتسمى هذه العزوم، العزوم حول الصفر أو العزوم الخام. وتشكل عزوم توزيع μ_1' ، μ_2' ، ... مجموعة الخواص التي تميز توزيعا عن غيره. وإذا أزحنا توزيعا بحيث ينسحب على طول محور السينات دون أن يتغير شكله فإن كل العزوم الخام لهذا التوزيع ستتغير، ولإبقاء العزوم كخواص مميزة للتوزيع لا تتأثر بعملية الانسحاب، نعرّف العزوم المركزية. والعزم المركزي من المرتبة k هو بالتعريف:

$$\mu_k = E\{(X-\mu)^k\} \quad ، \quad k = 1,2,... \tag{١٨}$$

ونرى بسهولة أن العزم المركزي الأول لأي توزيع هو الصفر، وأن العزم المركزي الثاني μ_2 هو التباين σ^2. وإذا علمنا العزوم الخام فيمكن حساب العزوم المركزية، والعكس، وعلى سبيل المثال:

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= E\left\{(X-\mu)^2\right\} = \mu_2' - \mu^2 \\
\mu_3 &= E\left\{(X-\mu)^3\right\} = E\left\{X^3 - 3X^2\mu + 3X\mu^2 - \mu^3\right\} \\
&= \mu_3' - 3\mu_2'\mu + 2\mu^3
\end{aligned}$$

وفي المقابل:

$$\begin{aligned}
\mu_3' &= E\left\{X^3\right\} = E\left\{[(X-\mu)+\mu]^3\right\} \\
&= E\left\{(X-\mu)^3 + 3(X-\mu)^2\mu + 3(X-\mu)\mu^2 + \mu^3\right\} \\
&= \mu_3 + 3\mu\,\mu_2 + \mu^3
\end{aligned}$$

ومن الأيسر، في التوزيعات المنفصلة، حساب ما يسمى بالعزوم العاملية. ونعرف العزم العاملي من المرتبة k على الشكل:

$$\mu_k^* = E\left\{X(X-1)\ldots(X-k+1)\right\} \ , \ k = 1,2,... \tag{١٩}$$

ونجد من أجل العزوم العاملية الثلاثة الأولى:

$$\begin{aligned}
\mu_1^* &= E(X) = \mu \\
\mu_2^* &= E(X^2 - X) = \mu_2' - \mu \\
\mu_3^* &= E(X^3 - 3X^2 + 2X) = \mu_3' - 3\mu_2' + 2\mu
\end{aligned}$$

وإذا علمنا العزوم العاملية فمن السهل أن نرى أنه يمكن حساب العزوم الخام باستخدام هذه العلاقات.

مثال (٤)

لنأخذ توزيع بواسون بمعلمة λ. فنحسب أولا المتوسط :

$$\mu=E(X)=\sum_{x=0}^{\infty} x\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$$
$$=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^x}{(x-1)!}e^{-\lambda}$$
$$=\lambda\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!}e^{-\lambda}$$
$$=\lambda$$

ومتوسط توزيع بواسون هو إذن المعلمة λ نفسها.

لنحسب الآن μ_k^* فنكتب :

$$\mu_k^*=E[X(X-1)...(X-k+1)]$$
$$=\sum_{x=0}^{\infty}x(x-1)\ldots(x-k+1)\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$$
$$=\sum_{x=k}^{\infty}\frac{\lambda^x}{(x-k)!}e^{-\lambda}$$
$$=\lambda^k\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!}e^{-\lambda}$$
$$=\lambda^k$$

ومن أجل $k=2$ نجد :

$$\lambda^2=E(X^2-X)$$

ومنه :

$$E(X^2)=\lambda^2+\lambda$$

وبالتالي :

$$\sigma^2=E(X^2)-\lambda^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

أي أن تباين توزيع بواسون يساوي المتوسط وكل منهما يساوي معلمة التوزيع λ.

(١-٧) الدوال المولّدة

نعرّف الدالة المولّدة لعزوم متغير عشوائي X بأنها :

$$M_X(t) = E(e^{Xt}) = E\{(e^t)^X\} \qquad (٢٠)$$

وسنختصر أحيانا التسمية فنقول دالة العزوم. وبنشر الدالة الأسية نجد :

$$M_X(t) = E\left[1 + Xt + \frac{X^2 t^2}{2!} + \dots\right]$$

$$= 1 + \mu t + \mu'_2 \frac{t^2}{2!} + \dots + \mu'_k \frac{t^k}{k!} + \dots \qquad (٢١)$$

فإذا عرفنا دالة العزوم واستطعنا نشرها في سلسلة قوى صحيحة في المتغير t، فإن معاملات النشر تمثل العزوم العادية للمتغير العشوائي مقسومة على المضروب الموافق. وهذا هو سبب تسميتها الدالة المولّدة للعزوم.

وباشتقاق العلاقة (٢٠)، k مرة نجد :

$$\frac{d^k}{dt^k} M_X(t) = E\left[\frac{d^k}{dt^k} e^{xt}\right]$$
$$= E\,[X^k\ e^{Xt}]$$

وإذا وضعنا الآن $t = 0$ ، نجد :

$$\frac{d^k}{dt^k} M_X(0) = E[X^k] = \mu'_k \qquad (٢٢)$$

ونحصل على النتيجة نفسها باشتقاق السلسلة في (٢١) حدا فحدا ثم وضع $t = 0$.

وسنشتق الآن بعض الخواص البسيطة لدوال العزوم.

١ – دالة عزوم المتغير cX حيث c عدد ثابت هي :

$$\begin{aligned} M_{cX}(t) &= E[e^{cXt}] \\ &= E\,[e^{X(ct)}] \\ &= M_X(ct) \end{aligned} \qquad (٢٣)$$

ونحصل عليها بوضع ct بدلا من t في عبارة دالة عزوم X.

٢ – دالة عزوم المتغير $X + b$ هي :

أي :

$$\begin{aligned} &M_{X+b}(t) = E(e^{t(X+b)}) = e^{bt}\, E(e^{tX}) = e^{bt}\, M_X(t) \\ &M_{aX+b}(t) = e^{bt}\, M_X(at) \end{aligned} \qquad (٢٤)$$

مثال (٥)

لنحسب دالة عزوم التوزيع الطبيعي المعياري فنجد:

$$M_Z(t)=E(e^{tz})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz}e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(z^2-2tz+t^2-t^2)}\,dz=e^{\frac{1}{2}t^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-t)^2}\,dz$$

$$=e^{\frac{1}{2}t^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du$$ ، (بوضع $Z - t = u$)

$$=e^{\frac{1}{2}t^2}\cdot 1=e^{\frac{1}{2}t^2} \qquad (٢٥أ)$$

ويمكن استخدام هذه النتيجة مع خواص الدالة المولدة للعزوم لإيجاد الدالة المولدة للعزوم للتوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ لمتغير عشوائي X. إذ نعلم أن $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ أو $X=\sigma Z+\mu$.

ومن الخاصتين الأولى والثانية نجد:

$$M_X(t)=M_{\sigma z+\mu}(t)=e^{\mu t}M_{\sigma Z}(t)=e^{\mu t}M_Z(\sigma t)=e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \qquad (٢٥ب)$$

$$M_{X-\mu}(t)=e^{-\mu t}\cdot M_X(t)=e^{-\mu t}\cdot e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}=e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}=1+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2+\ldots$$

ومعامل $\frac{t^2}{2!}$ هو العزم الثاني للمتغير $X - \mu$ أي $E(X-\mu)^2$ أو $V(X)$ ، أي أن σ^2 هو تباين X.

وبما أن معامل t في هذا النشر يساوي الصفر فإن $E(X-\mu) = 0$ أو $E(X) = \mu$. ونرى بوضوح أن جميع العزوم المركزية من مرتبة فردية تساوي الصفر.

مثال (٦)

لنحسب دالة عزوم توزيع ذي الحدين (الثنائي) بمعلمتين n و p:

$$M_X(t)=E\{e^{tX}\}=\sum_{x=0}^{n} e^{tx}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$

$$=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pe^t)^x q^{n-x}=(pe^t+q)^n \qquad (٢٦)$$

وبالاشتقاق يمكن الحصول على المتوسط $E(X) = np$ والتباين $Var(X) = npq$.

(١-٨) الوحدانية

أشرنا إلى عزوم توزيع ودالة عزوم توزيع على أنها خواص لهذا التوزيع ، فهل هي خواص مميزة للتوزيع أم أنه من الممكن أن يكون لتوزيعين مختلفين المتوالية نفسها من العزوم أو أن يكون لهما دالة العزوم نفسها؟. سنذكر في هذه الفقرة وبدون برهان الجواب على مثل هذه التساؤلات وذلك من خلال النظرية التالية التي تسمى نظرية الوحدانية لدوال العزوم:

نظـــــرية

إذا كانت دالة العزوم $M_X(t)$ لمتغير عشوائي X موجودة في فترة تمتد على جانبي النقطة $t = 0$ ، فعندئذ يوجد توزيع واحد وواحد فقط موافق للدالة $M_X(t)$.

مثال (٧)

إذا كانت دالة عزوم X هي $M_X(t) = e^{6t^2 + 50t}$ فما هو توزيع X؟

نعلم أن الدالة المولدة للعزوم لتوزيع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ هي :

$$M_X(t) = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \mu t}$$

والقوة هي كثيرة حدود من الدرجة الثانية حيث معامل t هو μ ومعامل t^2 هو نصف التباين ، وبالتالي يكـــون توزيع X هو التوزيع الطبيعي $N(50, 12)$ ، أي توزيع طبيعي بمتوسط $\mu = 50$ وتباين $\sigma^2 = 12$.

مثال (٨)

لنفرض أن تـــوزيع X هو التوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ فمـــــا هو توزيـــــع $Y = aX + b$؟

لدينا :
$$M_X(t)=e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2+\mu t}$$

وباستخدام(٢٣) و (٢٤) نجد :

$$M_{aX}(t)=M_X(at)=e^{\frac{1}{2}\sigma^2 a^2 t^2+a\mu t}$$

$$M_Y(t)=M_{aX+b}(t)=e^{bt}\ M_{aX}(t)=e^{\frac{1}{2}\sigma^2 a^2 t^2+(a\mu+b)t}$$

ولكن العبارة الأخيرة هي دالة عزوم توزيع طبيعي بمتوسط يساوي $a\mu+b$ وتباين $a^2\ \sigma^2$. وهذا يعني أنه إذا خضع متغير عشوائي طبيعي لتحويل خطي فإن توزيع المتغير العشوائي الناتج هو، أيضا، توزيع طبيعي.

وكما نعلم فإنه تحت شروط معينة تنتهي احتمالات توزيع ذي الحدين إلى الاحتمالات المقابلة لها من توزيع بواسون. كما سنرى فيما بعد أمثلة عن توزيع يشكل تقريبا جيدا لتوزيع آخر، وسنجد القاعدة التالية مفيدة في هذا المجال :

إذا انتهت دالة عزوم متغير عشوائي X_n إلى دالة عزوم المتغير العشوائي Y عندما $n\to\infty$ فعندئذ تتقارب دالة توزيع X_n إلى دالة توزيع Y.

(١-٩) حالة عدة متغيرات

نعلم في حالة متغير عشوائي واحد X من النوع المنفصل أن التوزيع الاحتمالي للمتغير X هو جدول أو علاقة يبين القيم الممكنة للمتغير X والاحتمال الموافق لكل قيمة، وتكون دالة الاحتمال $P(X=x)=f_X(x)$، ومجموع الاحتمالات فوق جميع القيم الممكنة يساوي الواحد تماما.

لنفرض الآن أن المتغير X يتضمن أكثر من مركبة، وعلى وجه التحديد، لنفرض أن X متجه عشوائي يتضمن مركبتين X_1 و X_2، وكلاهما من النوع المنفصل. وبعملية تعميم مباشرة لحالة متغير ذي مركبة واحدة نقول إنه يجب تحديد جميع

الأزواج الممكنة من القيم (x_1, x_2) حيث x_1 قيمة ممكنة للمركبة الأولى X_1 و x_2 قيمة ممكنة للمركبة X_2، ومن ثمَّ تخصيص احتمال لكل زوج من مجموعة الأزواج الممكنة بحيث يكون كل منها موجبا ومجموعها يساوي الواحد تماما. وهكذا تكون دالة الاحتمال المشتركة للمركبتين X_1 و X_2 معا، أو دالة الاحتمال المشتركة للمتجه العشوائي (X_1, X_2) هي :

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=P(X_1=x_1,X_2=x_2) \qquad (٢٧)$$

حيث $f(x_1, x_2) \geq 0$ لكل (x_1, x_2)، أي في كل نقطة من المستوى الحقيقي، وأيضا :

$$\sum_{x_1}\sum_{x_2} f(x_1,x_2)=1 \qquad (٢٨)$$

ونعني بالرمز $\sum_{x_1}\sum_{x_2}$ الجمع فوق جميع القيم الممكنة للمركبة X_2 ثم فوق جميع القيم الممكنة للمركبة X_1. ومن الواضح أنه إذا رمزنا لمجموعتي القيم الممكنة للمركبتين X_1 وX_2 بالرمزين A و B، على الترتيب، فإن مجموعة القيم الممكنة للمتجه (X_1, X_2) هي، بصورة عامة محتواة ضمن الجداء الديكارتي للمجموعتين $A \times B$. وعلى سبيل المثال، إذا كانت مجموعة القيم الممكنة للمركبة X_1 هي $A = \{1, 2, 3\}$ وكانت مجموعة القيم الممكنة للمركبة X_2 هي $B = \{0, 1, 2\}$ فإن مجموع كل الأزواج الممكنة (x_1, x_2) للمتجه (X_1, X_2) ملخصة في الجدول التالي :

الجدول رقم (١-١). القيم الممكنة للمتجه (X_1, X_2).

x_1 \ x_2	0	1	2
1	(1,0)	(1,1)	(1,2)
2	(2,0)	(2,1)	(2,2)
3	(3,0)	(3,1)	(3,2)

ولو فرضنا أن الاحتمالات المخصصة لكل زوج من أزواج القيم المذكورة في الجدول هي كما في الجدول التالي :

الجدول رقم (١-٢). دالة الاحتمال المشتركة للمتجه العشوائي (X_1,X_2).

$x_1 \backslash x_2$	0	1	2	
1	0.10	0.08	0.12	0.30
2	0.09	0.09	0.11	0.29
3	0.14	0.11	0.16	0.41
	0.33	0.28	0.39	1

فإن هذا الجدول يمثل دالة الاحتمال المشتركة للمتجه العشوائي (X_1,X_2).

ونقرأ من الجدول مثلا ، أن :

$$f_{X_1,X_2}(1,0)=P(X_1=1,X_2=0)=0.10$$

$$f_{X_1,X_2}(2,2)=P(X_1=2,X_2=2)=0.11$$

$$f_{X_1,X_2}(3,2)=P(X_1=3,X_2=2)=0.16$$

وهكذا...

ونلاحظ أن مجموع الاحتمالات المذكورة في الجدول السابق يساوي الواحد تماما. ولكن ماذا تمثل مجاميع السطور ومجاميع الأعمدة المذكورة في الجدول؟ من الواضح أن الحادثة $\{X_1=1\}$ مثلا ، هي اتحاد ثلاث حوادث منفصلة :

$$\{X_1=1\}=\{(X_1=1,X_2=0)\cup(X_1=1,X_2=1)\cup(X_1=1,X_2=2)\}$$

وبذلك يكون :

$$\begin{aligned}P\{X_1=1\}=f_{X_1}(1)&=P(X_1=1,X_2=0)+P(X_1=1,X_2=1)+P(X_1=1,X_2=2)\\&=f_{X_1,X_2}(1,0)+f_{X_1,X_2}(1,1)+f_{X_1,X_2}(1,2)\\&=\sum_{x_2=0}^{2}f_{X_1,X_2}(1,x_2)=0.10+0.08+0.12\\&=0.30\end{aligned}$$

أي أن مجموع السطر الأول يمثل احتمال أن تأخذ المركبة X_1 القيمة 1 ، متجاهلين تماما المركبة X_2 ، وبالمثل يمثل مجموع السطر الثاني احتمال أن تأخذ المركبة X_1 القيمة 2 ، ومجموع السطر الثالث احتمال أن تأخذ المركبة X_1 القيمة 3 ، وهذان الاحتمالان

الأخيران هما ، على الترتيب :

$$P\{X_1 = 2\} = 0.09 + 0.09 + 0.11 = 0.29$$
$$P\{X_2 = 3\} = 0.14 + 0.11 + 0.16 + = 0.41$$

ونلاحظ أن الهامش الأيمن للجدول يمثل دالة احتمال المركبة X_1، فهو يحدد لكل قيمة من القيم الممكنة للمركبة X_1 احتمالا ، بحيث إن مجموع هذه الاحتمالات يساوي الواحد تماما. ولأسباب واضحة تسمى هذه الدالة دالة احتمال هامشية للمركبة X_1.

وبصورة مماثلة تماما ، يتضح أن الهامش الأسفل للجدول ، وفيه مجاميع أعمدة الجدول ، يمثل دالة احتمال هامشية هي دالة الاحتمال الهامشية للمركبة X_2، إذ يمكن أن نكتب :

$$P\{X_2 = 0\} = P\{(X_2 = 0, X_1 = 1) \cup (X_2 = 0, X_1 = 2) \cup (X_2 = 0, X_1 = 3)\}$$
$$= 0.10 + 0.09 + 0.14 = 0.33$$

وبالمثل :

$$P\{X_2 = 1\} = 0.08 + 0.09 + 0.11 = 0.28$$
$$P\{X_2 = 2\} = 0.12 + 0.11 + 0.16 = 0.39$$

وبصورة عامة ، إذا كانت $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ دالة احتمال مشتركة للمتجه (X_1, X_2) فإن :

$f_{X_1}(x_1)=\sum_{x_2} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ دالة الاحتمال الهامشية للمركبة X_1 (٢٩)

$f_{X_2}(x_2)=\sum_{x_1} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ دالة الاحتمال الهامشية للمركبة X_2 (٣٠)

حيث $\sum_{x_2}$ و $\sum_{x_1}$ يعنيان المجموع فوق جميع القيم الممكنة للمركبة X_2، وفوق جميع القيم الممكنة للمركبة X_1، على الترتيب.

لو عدنا الآن إلى الجدول رقم (١-٢) وقسمنا قيم العمود الأول على مجموع هذا العمود 0.33 فإن مجموع الأعداد الناتجة هو الواحد ، وكل منها يمثل احتمالا شرطيا ، فالنسبة $\frac{0.10}{0.33}=\frac{10}{33}$ تمثل احتمال أن تأخذ المركبة X_1 القيمة 1 شريطة أن تكون المركبة X_2 مثبتة عند القيمة 0. وبصورة رمزية نعبر عن ذلك بكتابة $P(X_1 = 1 | X_2 = 0)=\frac{0.10}{0.33}=\frac{10}{33}$.

وبصورة مماثلة نجد :

$$P(X_1=2|\ X_2=0)=\frac{0.09}{0.33}=\frac{9}{33};P(X_1=3|\ X_2=0)=\frac{0.14}{0.33}=\frac{14}{33}$$

وهكذا تمثل الاحتمالات $\frac{10}{33}$ ، $\frac{9}{33}$ ، و $\frac{14}{33}$ دالة احتمال شرطية للمركبة X_1 علما أن المركبة الثانية X_2 مثبتة عند القيمة صفر ، ونلخص ذلك في الجدول التالي :

الجدول رقم (١-٣). دالة الاحتمال الشرطية للمركبة X_1 علما أن المركبة X_2 تساوي الصفر.

x_1	1	2	3
$f_{X_1}(x_1\|0)$	$\frac{10}{33}$	$\frac{9}{33}$	$\frac{14}{33}$

وبصورة مماثلة يمكن أن نضع جدولا يمثل دالة الاحتمال الشرطية $f_{X_1}(x_1|1)$ ودالة الاحتمال الشرطية $f_{X_1}(x_1|2)$.

وفي المقابل لو أننا قسمنا كل سطر من سطور الجدول (١-٢) على مجموعه فسنحصل على ثلاث دوال احتمال شرطية للمركبة X_2 علما أن المركبة X_1 مثبتة عند قيمة محددة من قيمها الثلاث الممكنة. وعلى سبيل المثال نكتب الجدول التالي الذي يمثل $f_{X_2}(x_2|2)$.

الجدول رقم (١-٤). دالة الاحتمال الشرطيه للمركبة X_2 علما أن المركبة X_1 تساوي 2.

x_2	0	1	2
$f_{X_2}(x_2\|2)$	$\frac{9}{29}$	$\frac{9}{29}$	$\frac{11}{29}$

وبصورة عامة يمكن أن نكتب بصورة رمزية القاعدة التالية لدالة الاحتمال الشرطي :

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)=\frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)},\ \ f_{X_2}(x_2)\neq 0 \tag{٣١}$$

$$f_{X_2|X_1}(x_2|x_1)=\frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_1}(x_1)},\ \ f_{X_1}(x_1)\neq 0 \tag{٣٢}$$

وعندما تكون $f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)=f_{X_1}(x_1)$ فهذا يعني أن احتمال أن تأخذ المركبة X_1 قيمة معينة x_1 لم يتأثر بتثبيت قيمة المركبة X_2، مما يشير بالبداهة إلى استقلال المركبتين X_1 و X_2 بعضهما عن بعض. ولكننا نجد في هذه الحالة أن:

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) \tag{٣٣}$$

وهكذا نخلُص إلى القاعدة التالية:

إذا كانت المركبتان X_1 و X_2 مستقلتين فإن دالة الاحتمال المشتركة لهما معا تساوي جداء دالتيهما الهامشيتين، وهو ما تعبر عنه العلاقة (٣٣) بصورة رمزية.

وأخيرا نقول إنه إذا كانت المركبتان X_1 و X_2 من طبيعة مستمرة فإن دالة الكثافة تحل محل دالة الاحتمال في كل ما سبق، وتمثل الدالة المشتركة $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ الكثافة الاحتمالية في النقطة (x_1, x_2) من مستوى الاحداثيات. وتصبح العلاقة (٢٨) كما يلي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2=1 \tag{٣٤}$$

كما تصبح العلاقتان (٢٩) و (٣٠) على الشكل:

$$f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)\,dx_2 \tag{٣٥}$$

$$f_{X_2}(x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)\,dx_1 \tag{٣٦}$$

أما العلاقات (٣١) ، (٣٢) و (٣٣) فتبقى كما وردت، علما أن الدوال f تشير الآن إلى دوال كثافة احتمالية بدلا من دوال احتمال. ويمكن تعميم جميع العلاقات الواردة في هذه الفقرة إلى حالة متجه عشوائي يتضمن n من المركبات، وعلى وجه الخصوص نقول إنه إذا كانت المركبات X_1، X_2، ...، X_n مستقلة فيما بينها فإن دالة الكثافة المشتركة لها جميعا (أو دالة الاحتمال المشتركة) تساوي جداء الدوال الهامشية لكل مركبة على حدة. وبصورة رمزية نكتب:

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)=f_{X_1}(x_1)\,f_{X_2}(x_2)\ldots f_{X_n}(x_n) \qquad (٣٧)$$

(١-١٠) العزوم والدوال المولدة للعزوم لمتجه عشوائي

سنناقش حالة متجه (X_1, X_2) يتضمن مركبتين. وكتعميم لتعريف التوقع في حالة متغير واحد نعرّف توقع دالة $g(X_1,X_2)$ كما يلي:

$$E\{g(X_1,X_2)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1,x_2)\,f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 \qquad (٣٨)$$

والتعميم بصورة مباشرة إلى حالة أكثر من متغيرين واضح.

لدينا هنا متوسط وتباين للمتغير X_1:

$$\mu_1=E(X_1) \quad ، \quad \sigma_1^2=E(X_1-\mu_1)^2 \qquad (٣٩)$$

ومتوسط وتباين للمتغير X_2:

$$\mu_2=E(X_2) \quad ، \quad \sigma_2^2=E(X_2-\mu_2)^2 \qquad (٤٠)$$

ونرغب بالإضافة إلى ذلك أن نعرف قياسا ما لكيفية ومدى تأثر قيم أحد المتغيرين بقيم المتغير الآخر، ونعرّف من أجل ذلك التغاير بين X_1 و X_2 على الشكل:

$$Cov(X_1,X_2)=\sigma_{12}=E\{(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)\} \qquad (٤١)$$

وإذا كان X_1 و X_2 مستقلين فعندئذ نجد:

$$\sigma_{12}=E\{(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)\,f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)\,f_{X_1}(x_1)\,f_{X_2}(x_2)\,dx_1\,dx_2$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x_1-\mu_1)f_{X_1}(x_1)\,dx_1\int_{-\infty}^{+\infty}(x_2-\mu_2)\,f_{X_2}(x_2)\,dx_2$$

$$=E\{X_1-\mu_1\}\,E\{(X_2-\mu_2)\}=0 \qquad (٤١أ)$$

وإذا كان انحرافا X_1 و X_2 موجبين أو سالبين معا فإن σ_{12} تأخذ قيمة كبيرة وموجبة. وعلى الوجه الآخر إذا كان لانحرافي X_1 و X_2 إشارتان متعاكستان، فعندئذ ستكون σ_{12} كبيرة وسالبة.

ويمكن حساب التغاير بسهولة من العلاقة :

$$\sigma_{12} = E\{X_1X_2 - \mu_1X_2 - \mu_2X_1 + \mu_1\mu_2\} = E(X_1X_2) - \mu_1\mu_2 = E(X_1X_2) - E(X_1)\,E(X_2) \quad (٤٢)$$

ونعرّف معامل الارتباط بين X_1 و X_2، ونرمز له عادة بالرمز ρ، بالعلاقة :

$$\rho=\frac{Cov(X_1,X_2)}{\left[Var(X_1).Var(X_2)\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2} \quad (٤٣)$$

ويمكن بسهولة تبيان أن $-1 \le \rho \le 1$. وإذا كان X_1 و X_2 مستقلين فإن $\sigma_{12} = 0$ وبالتالي يكون $\rho = 0$، ولكن العكس ليس صحيحا بالضرورة.

وتجدر العودة الآن إلى خواص الدوال المولدة للعزوم في الفقرة (١-٧) لإضافة خاصة أخرى تقول إنه إذا كان المتغيران X_1 و X_2 مستقلين فإن الدالة المولدة لعزوم مجموعهما $Y = X_1 + X_2$ هي جداء دالة العزوم للمتغير X_1 ودالة العزوم للمتغير X_2، ذلك لأن :

$$\begin{aligned}
M_Y(t)&=M_{X_1+X_2}(t)=E\left\{e^{t(X_1+X_2)}\right\}=E\left\{e^{tX_1}.e^{tX_2}\right\}\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx_1}.e^{tx_2}.f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx_1}.e^{tx_2}.f_{X_1}(x_1)\,f_{X_2}(x_2)\,dx_1\,dx_2\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx_1}\,f_{X_1}(x_1)\,dx_1\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx_2}\,f_{X_2}(x_2)\,dx_2
\end{aligned}$$

أي أن :

$$M_{X_1+X_2}(t)=M_{X_1}(t).\,M_{X_2}(t) \quad (٤٤)$$

ويمكن بوضوح تعميم هذه القاعدة إلى حالة n متغير مستقل حيث n أي عدد صحيح لنجد:

$$M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) \quad (٤٥)$$

مثال (٩)

لتكن المتغيرات X_1 ، X_2 ، ... ، X_n مستقلة ويتوزع كل X_i وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط μ_i وتباين σ_i^2 ، $(i = 1,2,...,n)$. ما هو توزيع التركيب الخطي $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ في هذه المتغيرات؟

بالاستفادة من العلاقات (٢٣) ، (٢٥ب) و (٤٥) يمكن كتابة:

$$M_Y(t) = M_{\sum_{i=1}^{n} a_i X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{a_i X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(a_i t)$$

$$= e^{\frac{1}{2}\sigma_1^2 a_1^2 t^2 + \mu_1 a_1 t} . e^{\frac{1}{2}\sigma_2^2 a_2^2 t^2 + \mu_2 a_2 t} .... e^{\frac{1}{2}\sigma_n^2 a_n^2 t^2 + \mu_n a_n t}$$

$$= exp\left[\frac{1}{2}\left(\sum_1^n a_i^2 \sigma_i^2\right) t^2 + \left(\sum_1^n a_i \mu_i\right) t\right] \quad (٤٦)$$

وهذه العبارة الناتجة هي الدالة المولدة للعزوم لتوزيع طبيعي متوسطه $\mu = \sum_1^n a_i \mu_i$ وتباينه $\sigma^2 = \sum_1^n a_i^2 \sigma_i^2$.

وهكذا نجد القاعدة التالية:

إذا كانت المتغيرات X_1 ، X_2 ، ... ، X_n مستقلة فيما بينها ويتوزع كل X_i وفق التوزيع الطبيعي $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ، $(i = 1,...,n)$ ، فإن التركيب الخطي $Y = \sum_1^n a_i X_i$ حيث a_1 ، ... ، a_n أية أعداد ثابتة يتوزع ، أيضا ، وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي $\mu = \sum_1^n a_i \mu_i$ ، وتباين يساوي $\sigma^2 = \sum_1^n a_i^2 \sigma_i^2$.

مثال (١٠)

كمثال على دالة كثافة مشتركة بمتغيرين X و Y نذكر دالة الكثافة المشتركة للتوزيع الطبيعي:

$$f(x,y;\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)=$$
$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} \qquad (٤٨)$$
$$-\infty<\mu_i<+\infty،\ (i=1,2)،\ 0<\sigma_i^2<\infty\ ؛\ (i=1,2)؛ -1\le\rho\le+1$$

ويمكن تبيان أن $E(X)=\mu_1$، $Var(X)=\sigma_1^2$، $E(Y)=\mu_2$، $Var(Y)=\sigma_2^2$ وأن $Cov(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2$، وبالتالي تكون المعلمة ρ ممثلة لمعامل الارتباط بين X و Y.

وبصورة عامة، ليكن المتغير ذي r مركبة $(X_1, X_2, ..., X_r)$ فنعرف العزوم العادية على الشكل:

$$\mu'_{k_1...k_r}=E\left[X_1^{k_1}X_2^{k_2}...X_r^{k_r}\right] \qquad (٤٩)$$

وبصورة خاصة نكتب:

$$\begin{aligned}\mu'_{100...0}&=\mu_1=E(X_1)\\ \mu'_{010...0}&=\mu_2=E(X_2)\end{aligned} \qquad (٥٠)$$

ونعرف العزوم المركزية على الشكل:

$$\mu_{k_1...k_r}=E\left[(X_1-\mu_1)^{k_1}...(X_r-\mu_r)^{k_r}\right] \qquad (٥١)$$

وبصورة خاصة:

$$\begin{aligned}\mu_{200...0}&=\sigma_1^2=E(X_1-\mu_1)^2\\ \mu_{020...0}&=\sigma_2^2=E(X_2-\mu_2)^2\end{aligned} \qquad (٥٢)$$

والتغاير بين X_1 و X_2 هو:

$$\mu_{110...0}=\sigma_{12}=E[(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)] \qquad (٥٣)$$

كما يمكن تعريف دالة العزوم:

$$M(t_1,\ldots,t_n)=E\left[e^{X_1t_1+\ldots+X_rt_r}\right]$$
$$=\Sigma\mu'_{k_1\ldots k_r}\frac{t_1^{k_1}}{k_1!}\cdots\frac{t_r^{k_r}}{k_r!}. \qquad (٥٤)$$

ويمكن الحصول على العزوم بالاشتقاق ثم وضع كل المقادير t مساوية للصفر، أو بالنشر في سلسلة قوى من الشكل المبين في المعادلة (٥٤) ثم اختيار المعاملات المناسبة. وإذا رغبنا في إيجاد التوزيع الهامشي لِـ $(X_1,\ldots, X_s)$ مثلا، فيمكننا الحصول على دالة العزوم الموافقة لهذا التوزيع مباشرة من المعادلة (٥٤) وذلك بوضع المقادير t غير الضرورية مساوية للصفر أي:

$$E\left[e^{X_1t_1+\ldots+X_st_s}\right]=M(t_1,\ldots,t_s,0,\ldots,0) \qquad (٥٥)$$

وتوجد كذلك نظريات مشابهة لتلك التي ذكرناها في الفقرة السابقة حول الوحدانية وتقارب متوالية من دوال العزوم.

(١-١١)* التوقع الشرطي

إذا كان (X, Y) متغيرا عشوائيا مركبا منفصلا دالة احتماله المشتركة $f(x, y)$، وكان لـِ X و Y دوال الاحتمال الهامشية $f(x)$ و $g(y)$، على الترتيب، فعندئذ تكون دالة الاحتمال الشرطي لِـ Y علما أن $X=x$ هي:

$$g(y|x)=f(x,y)/f(x) \quad ، \quad f(x)\neq 0 \qquad (٥٦)$$

ويكون التوقع الشرطي لِـ Y من أجل $X=x$ بالتعريف هو:

$$E(Y|x)=\sum_y y\, g(y|x) \qquad (٥٧)$$

وبصورة مشابهة نعرّف التوقع الشرطي لِـ X من أجل $Y=y$ على الشكل:

* للقراءة فقط.

$$E(X|y)=\sum_x x\, f(x|y) \qquad (٥٨)$$

وذلك من أجل كل قيم Y التي يكون من أجلها $g(y) \neq 0$.

وإذا كان $(X,\ Y)$ متغيرا عشوائيا مركبا مستمرا دالة كثافته المشتركة $f(x,\ y)$ ، وكانت دالتا الكثافة الهامشيتين من أجل X و Y هما ، على الترتيب ، $f(x)$ و $g(y)$ ، فعندئذ تكون دالة الكثافة الشرطية لِـ Y علما أن $X=x$ هي كما نعلم :

$$g(y|\ x) = f(x, y) / f(x) \quad ، \quad f(x) \neq 0 \qquad (٥٩)$$

ونعرّف التوقع الشرطي لِـ Y علما أن $X=x$ بالعلاقة :

$$E(Y|x)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\, g(y|x)dy \qquad (٦٠)$$

وبصورة مشابهة :

$$E(X|y)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x|y)dx \qquad (٦١)$$

وذلك من أجل جميع قيم Y التي تجعل $g(y) \neq 0$.

وعندما نثبت X فإن $E(Y|x)$ هو مجرد عدد ، أما إذا سمحنا لِـ x أن تتغير فوق مجموعة القيم التي تجعل $f(x) \neq 0$ ، فعندها يشكل $E(Y|x)$ دالة في x. ويمكن عندئذ أن نعرّف متغيرا عشوائيا يأخذ القيمة $E(Y|\ \ x)$ من أجل $X = x$ ، وسنرمز لهذا المتغير العشوائي بِـ $E(Y|\ X)$ ، وهو دالة في المتغير العشوائي X.

ويمكن البرهان بسهولة على أن :

$$E(Y) = E[\mathrm{E}(Y|X)] \qquad (٦٢)$$

ففي حالة متغيرين منفصلين X و Y ، نكتب وفقا لتعريف التوقع الشرطي في (٦٢) :

$$E[E\,(Y|X)] = \Sigma_x\ E(Y|x).\, f(x)$$

ولكن من أجل كل قيمة x تجعل $f(x) \neq 0$ لدينا :

$$E(Y\,|x) = \Sigma_y\ \mathrm{y.\ g}\,(y|x)$$

أي أن :

$$E\,[E\,(Y|X)] = \Sigma_x f(x)\,\Sigma_y\, y\, g\,(y|x) = \Sigma_y\, y\,\Sigma_x\, g\,(y|x)\, f(x)$$

ولكن $g(y|x).\, f(x) = f(x,y)$ حيث $f(x,y)$ هي دالة الكثافة المشتركة لِ X و Y ، ونعلم أن :

$$\Sigma_x f(x,y) = \Sigma_x\, g(y|x)\, f(x) = g\,(y)$$

ومنه :

$$E\,[E\,(Y|X)] = \Sigma_y\, y.g\,(y) = E(Y)$$

والبرهان مشابه في حالة متغير مستمر.

وإذا كان X و Y مستقلين فعندئذ :

$$E(X|y) = E(X) \quad , \quad E(Y|x) = E(Y) \qquad (٦٣)$$

وأخيرا نذكر بدون برهان النظرية التالية:

لتكن $\varphi(x,y)$ دالة في المتغيرين X و Y. فإذا كان $(X,\ Y)$ متغيرا عشوائيا مركبا منفصلا ، وكانت $g(y|x)$ دالة الاحتمال الشرطية لِY من أجل $X = x$ ، فعندئذ يكون :

$$E\,[\varphi\,(X,Y)\,|x] = \Sigma_y\, \varphi(x,y).\, g\,(y|x)$$

وإذا كانت $\varphi(x,y)$ دالة مستمرة في X و Y وكان (X,Y) متغيرا عشوائيا مركبا مستمرا ، و$g(y|x)$ دالة الكثافة الشرطية لِ Y علما أن $X = x$ ، فعندئذ :

$$\varphi\,(x,y).\, g\,(y|x)\, d\,y = \int_{-\infty}^{+\infty} E\,[\varphi\,(X,Y)|x] \qquad (٦٥)$$

(١-١٢)* منحنى الانحدار

نحتاج إلى التعريف النظري لمنحنى الانحدار عند بناء نماذج تجريبية لمنحنيات الانحدار. لتكن x_0 قيمة مثبتة لمتغير X ، فمن الواضح أن $E(Y|x_0)$ سيتوقف على قيمة

* للقراءة فقط.

x_0، وبصورة عامة نقول إن $E(Y|X=x)$ يمثل دالة في x ونرمز له أحيانا بـ $\bar{y}_x$. والخط البياني للدالة $E(Y|x)$ كدالة في x هو منحني انحدار Y على x. ونعبر تحليليا عن معادلة منحنى الانحدار على الشكل:

$$E(Y|x)=\bar{y}_x=\int_{-\infty}^{+\infty} y f(y|x)dy \qquad (٦٦)$$

ويمكن كتابة هذه العلاقة على الشكل:

$$E(Y|x)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\frac{f(x,y)}{f(x)}\,dy \qquad (٦٧)$$

حيث $f(x, y)$ دالة الكثافة المشتركة للمتغيرين X و Y. ويمكن تعريف منحنى انحدار X على Y بطريقة مماثلة. ولتوضيح الفكرة نعرض فيما يلي مثالين.

مثال (١١)

لتكن دالة الكثافة المشتركة:

$$f(x,y)=\begin{cases} 2-x-y, & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

فتكون دالة الكثافة الهامشية لِـ X:

$$f(x)=\int_0^1 (2-x-y)\,dy=\frac{3}{2}-x \quad , \qquad 0<x<1$$

وبتطبيق العلاقة (٦٦) نجد معادلة انحدار Y على x:

$$E(Y|x)=\int_0^1 y\frac{2-x-y}{\frac{3}{2}-x}dy=\frac{3x-4}{6x-9}$$

وهي معادلة قطع زائد.

مثال (١٢)

إذا عُدنا إلى التوزيع الطبيعي بمتغيرين في المعادلة (٤٧) فيمكننا كتابة دالة الكثافة الشرطية $f(y|x)$ على الشكل :

$$f(y|x)=\frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[u^2-2\rho uv+v^2\right]}}{2\pi\,\sigma_x\,\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\div\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}$$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[v^2-2\rho uv+\rho^2u^2\right]}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{v-\rho u}{\sqrt{1-\rho^2}}\right]^2} \qquad (٦٨)$$

حيث $u=\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}$ و $v=\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}$.

وإذا عُدنا فعوضنا u و v بقيمها بدلالة x و y نجد :

$$f(y|x)=\frac{e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{y-\mu_y-\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)}{\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\right]^2}}{\sqrt{2\pi}\;\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \qquad (٦٩)$$

وبما أن x مثبتة فإن هذه العلاقة تعني أن دالة الكثافة الشرطية لـِY علما أن $X=x$ هي بدورها دالة كثافة طبيعية بمتوسط يساوي $\mu_y+\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)$ وانحراف معياري يساوي $\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}$. ومن تناظر الدالة الطبيعية بمتغيرين بالنسبة لـِX وY نقول إنه يمكن الوصول إلى نتائج مشابهة من أجل دالة الكثافة الشرطية لِـX علما أن $Y=y$.

ونلاحظ أن معادلة منحنى الانحدار هنا هي معادلة خط مستقيم ، أي أن :

$$E(Y|x)=\bar{y}_x=\mu_y+\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x) \qquad (٧٠)$$

وهذه الخاصة التي يتمتع بها التوزيع الطبيعي بمتغيرين، أي كون منحنى انحدار Y على X عبارة عن خط مستقيم هي التي تبرر الاستخدام المتواتر للانحدار الخطي في تطبيقات الإحصاء.

وجدنا عند تعريف معامل الارتباط ρ بين متغيرين في العلاقة (٤٣) أنه إذا كان المتغيران مستقلين فإن الارتباط بينهما يكون $\rho = 0$، ولكن انعدام معامل الارتباط لايعني بالضرورة أن المتغيرين مستقلان إلا في حالة واحدة هي عندما يتوزع المتغيران وفق التوزيع الطبيعي. ويمكن تبيان أن دالة الكثافة الهامشية $f_1(x)$ للمتغير X هي التوزيع الطبيعي $N(\mu_x,\sigma_x^2)$ ، وأن التوزيع الهامشي $f_2(y)$ للمتغير Y هو التوزيع الطبيعي $N(\mu_y,\sigma_y^2)$. لنضع $\rho = 0$ في عبارة التوزيع المشتركة $f(x, y)$ فنجد :

$$f(x,y) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}\,\sigma_y\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\}$$
$$= f_1(x)\cdot f_2(y)$$

وهذا يعني أن X وY مستقلان. وهكذا نجد القاعدة المفيدة التالية، وهي خاصة بالتوزيع الطبيعي :

ليكن X وY متغيرين طبيعيين، إذا كان معامل الارتباط بين X وY مساويا للصفر فإن X وY مستقلان.

(١-١٣) تمـــــارين

١- احسب $E[X]$ و $V(X)$ للتوزيع المنتظم فوق الفترة (a, b).

٢- احسب $E[X]$ و $V(X)$ للتوزيع المنتظم فوق الأعداد الصحيحة $\{1,2,...,N\}$. يشكل رمي حجر نرد متوازن مثالا يكون فيه $N = 6$.

٣- احسب المتوسط والتباين للتوزيع :

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & , 0 < x < 1 \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

٤- (أ) إذا كانت دالة العزوم لمتغير عشوائي X هي $M_X(t) = exp[18t^2 + 15t]$ فاحسب $P(3.24 < X < 26.76)$.

(ب) إذا كانت دالة العزوم لمتغير عشوائي Y هي $M_Y(t) = (0.6 + 0.4e^t)^{10}$ فاحسب $P(X \geq 2)$.

٥- بيّن أن $E[X-t]^2$ يبلغ أدنى قيمة له عندما يكون $t = E[X] = \mu$.

٦- دالة التوزيع لتوزيع باريتو (*Pareto*) هي :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_0 \\ 1-c\ x^{-\alpha} & x \geq x_0 \end{cases}$$

حيث المعلمة α موجبة ، احسب c وأوجد دالة الكثافة. احسب متوسط وتباين التوزيع.

٧- توزيع قياسات مرمّزة لقطر نوع من الأسلاك له دالة كثافة :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi(1+x^2)} & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

احسب متوسط هذا التوزيع.

٨- إذا كان X يتبع التوزيع الأسي $f(x) = e^{-x},\ x > 0$، احسب $E[g(X)]$ حيث $g(x) = e^{3x/4}$.

٩- لدينا دالة الكثافة :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\ln 3}, & 1 < x < 3 \\ 0 & , \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد $E[X]$، $E[X^2]$ ، $E[X^3]$ و $E[X^3 + 2X^2 - 3X+1]$.

١٠- يمكن النظر إلى ربح مقاول في تعهد يقوم به كمتغير عشوائي مستمر X دالة كثافته :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{18}(x+1)\,, & -1 < x < 5 \\ 0\,, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

حيث الوحدات بآلاف الريالات. ما هو الربح المتوقع لهذا المقاول؟

١١- الاستهلاك اليومي من المياه في مدينة معينة (بملايين اللترات) متغير عشوائي X دالة كثافته :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}xe^{-x/3}\,, & x > 0 \\ 0\,, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

ما هو الاستهلاك اليومي المتوقع في أي يوم معطى في هذه المدينة؟

١٢- بيّن أن :

$$\mu_r = \mu'_r - \binom{r}{1}\mu'_{r-1}.\mu + \ldots + (-1)^i\binom{r}{i}\mu'_{r-i}.\mu^i + \ldots + (-1)^{r-1}(r-1).\,\mu^r; r = 1,2,3,\ldots$$

واستخدم هذه العبارة لحساب μ_3 و μ_4.

١٣- مقياس الالتواء (نقص التناظر) يُعطى عادة بالمقدار :

$$\alpha_3 = \mu_3 / \sigma^3$$

استخدم عبارة μ_3 التي وجدتها في التمرين السابق (التمرين ١٢) لحساب مقياس الالتواء لكل من التوزيعين التاليين (لهما المتوسط نفسه والانحراف المعياري نفسه) :

(أ) $f(1) = 0.05$ ، $f(2) = 0.15$ ، $f(3) = 0.30$ ، $f(4) = 0.30$ ، $f(5) = 0.15$ و $f(6) = 0.05$.

(ب) $f(1) = 0.05$ ، $f(2) = 0.20$ ، $f(3) = 0.15$ ، $f(4) = 0.45$ ، $f(5) = 0.10$ و $f(6) = 0.05$.

ارسم المدرج الاحتمالي لكل من التوزيعين ولاحظ أن الأول متناظر وهناك ذيل يمتد إلى اليسار في التوزيع الثاني أي أن فيه التواء سالبا.

١٤- مدى كون قمة التوزيع مدببة أو منبسطة يسمى تفلطح التوزيع ومقياس التفلطح معطى عادة بالصيغة التالية: $\alpha_4 = \mu_4 / \sigma^4$.

استخدم عبارة μ_4 التي وجدتها في التمرين (١٢) لكل من التوزيعين المتناظرين:

(أ) $f(-3) = 0.06$ ، $f(-2) = 0.09$ ، $f(-1) = 0.10$ ، $f(0) = 0.50$ ، $f(1) = 0.10$ ، $f(2)=0.09$ و $f(3) = 0.06$.

(ب) $f(-3) = 0.04$ ، $f(-2) = 0.11$ ، $f(-1) = 0.20$ ، $f(0) = 0.30$ ، $f(1) = 0.20$ ، $f(2)=0.11$ و $f(3) = 0.04$.

أي التوزيعين أكثر تفلطحا؟

١٥- إذا وضعنا $k\sigma = c$ في متراجحة تشيبيشيف فماذا تؤكده هذه المتراجحة حول احتمال أن يأخذ متغير عشوائي قيمة بين $\mu - c$ و $\mu + c$؟

١٦- أوجد الدالة المولدة لعزوم متغير عشوائي منفصل X دالة احتماله:

$$f(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x \quad , \quad x = 1,2,3,...$$

واستخدمها لحساب μ_1' و μ_2'.

١٧- الفترة الزمنية اللازمة لخدمة شخص في كافيتريا هي متغير عشوائي دالة كثافته:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-x/4} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد الدالة المولدة للعزوم واستخدمها لحساب متوسط وتباين طول الفترة الزمنية اللازمة لخدمة شخص يدخل الكافيتريا.

١٨- أوضح لماذا لايمكن أن تتخذ الدالة المولدة لعزوم أي متغير عشوائي الصيغة :

$$M_X(t)=\frac{t}{1-t}$$

١٩- دالة الكثافة لمتغير عشوائي X هي :

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|} \quad ، -\infty < x < +\infty$$

بيّن أن الدالة المولدة للعزوم هي : $M_X(t)=\frac{1}{1-t^2}$ ثم أوجد تباين هذا التوزيع.

٢٠- إذا كان X متغيرا عشوائيا غير سالب متوسطه μ فمن أجل أي عدد ثابت موجب a تسمى هذه المتراجحة : $P(X \geq a) \leq \frac{\mu}{a}$ متراجحة ماركوف.

٢١- يمكن النظر إلى درجات خريجي الثانوية العامة في اختبار لدخول كلية معينة على أنه متغير عشوائي متوسطه $\mu = 41$. أوجد حدا أعلى لاحتمال أن يحصل متقدم لدخول الكلية على درجة (٦٥) أو أكثر.

٢٢- صندوق يتضمن (١٠) كرات أربع منها بيضاء واثنتان حمراوان. سحبنا عشوائيا وبدون إعادة ثلاث كرات. ليكن X وY عدد الكرات البيضاء والحمراء في العينة، على الترتيب.

(أ) أوجد دالة الاحتمال المشتركة للمتجه (X,Y).

(ب) أوجد دالتي الاحتمال الهامشيتين.

(جـ) أوجد دالة الاحتمال الشرطية للمتغير X علما أن $Y=0$.

(د) احسب $\rho(X, Y)$.

٢٣- دالة الكثافة المشتركة لمتغيرين عشوائيين X ، Y هي :

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y} & , x>0,\ y>0 \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد الدالة المولدة المشتركة للعزوم واستخدمها لتحديد $E(X)$ ، $E(Y)$ ، $E(XY)$ و $Cov(X,Y)$.

٢٤– عبّر عن $Cov\ (X+Y,\ X-Y)$ و $Var(X-Y)$ ، $Var(X+Y)$ بدلالة $V(X)=\sigma_x^2$ ، $V(Y)=\sigma_y^2$ و $Cov(X,Y)=\sigma_{x,y}$.

٢٥– إذا كانت تباينات X_1 ، X_2 و X_3 هي 5 ، 4 و 7 ، على الترتيب ، وكان $Cov(X_1, X_2) = 3$ و $Cov(X_1, X_3) = -2$ ، وكان X_2 مستقلا عن X_3 ، فأوجد تغاير $Y_1 = X_1 - 2X_2 + 3X_3$ و $Y_2 = -2X_1 + 3X_2 + 4X_3$.

٢٦– لتكن دالة الكثافة الشرطية :

$$f(y|x) = x^y e^{-x}/y! \quad ; \quad y = 0,1, \dots$$

إذا كانت الدالة الهامشية للمتغير X هي $f(x) = e^{-x}, x > 0$ ، فبيّن أن دالة الاحتمال الهامشية للمتغير Y هي $y = 0, 1, \dots$ ، $g(y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{y+1}$.

٢٧– لتكن دالة الكثافة المشتركة $f(x, y) = x\, e^{-x(y+1)}, x > 0, y > 0$ أوجد :

(أ) دالتي الكثافة الهامشيتين.

(ب) دالتي الكثافة الشرطيتين.

(جـ) منحني انحدار Y على X.

العينات العشوائية

(٢-١) مقـــــدمة

علـم الإحصـاء هـو مجموعـة المفـاهيم والمعـارف النظريـة والطرائـق العمليـة الـتي تسمح باتخاذ القرار الأقرب إلى السلامة في ظروف تفتقد ضرورة القانون وتخضع للريبة والمصادفة وذلك بأقصى فعالية وأقل تكلفة ممكنتين.

وإذا اقتفينا عبارات أقل تجريدا وأكثر محسوسية وبساطة قلنا إن علـم الإحصـاء هو مجموعة المفاهيم والمعارف النظرية والطرائق العملية التي تسمح باستقراء خصـائص مجتمع اعتمادا على معلومات تتضمنها عينة من هذا المجتمع ويسعى باستمرار إلى:

أ) أن تتضمن العينة أكبر قدر من المعلومات لقاء أقل تكلفة وجهد ممكنين.

ب) أن يحقق الاستخدام الأمثل لكل ما تتضمنه العينة من معلومات.

ومن هذه العبارات الأخيرة نجد بوضـوح أن كـل دراسـة إحصـائية تنطـوي علـى مجتمع يشكل دائما هدف الدراسة وعلى عينة تشكل الوسيلة إلى هذا الهـدف. وسنركز هنا على دراسة مجتمعات لانهائية. ونتصور مع كل متغير عشوائي، X مثلا، مجتمعا من القياسات هو جملة القياسـات، الـتي كنـا سنحصـل عليهـا لـو أننـا كررنـا تجربـة قيـاس المـتغير X عـددا هـائلا مـن المـرات تحـت الشـروط والظـروف نفسـها. ويقـدم التوزيـع الاحتمالي للمتغير X وصفا احتماليا لمجتمع القياسات، فمـن خـلال هـذا التوزيـع يمكـن

الإجابة على تساؤلات مهمة مثل، ما هي نسبة القياسات في مجتمع القياسات التي تقل عن عدد محدد؛ أو ما هي نسبة القياسات في المجتمع التي تتجاوز عددا محددا؟. أو ما هي نسبة القياسات التي تقع بين عددين محددين؟ أو ما هي القيمة التي يتمركز عندها مجتمع القياسات؟ وكيف تنتشر القياسات في المجتمع حول مركز المجتمع؟ ....إلخ

(٢-٢) المعلمة وفضاء المعالم

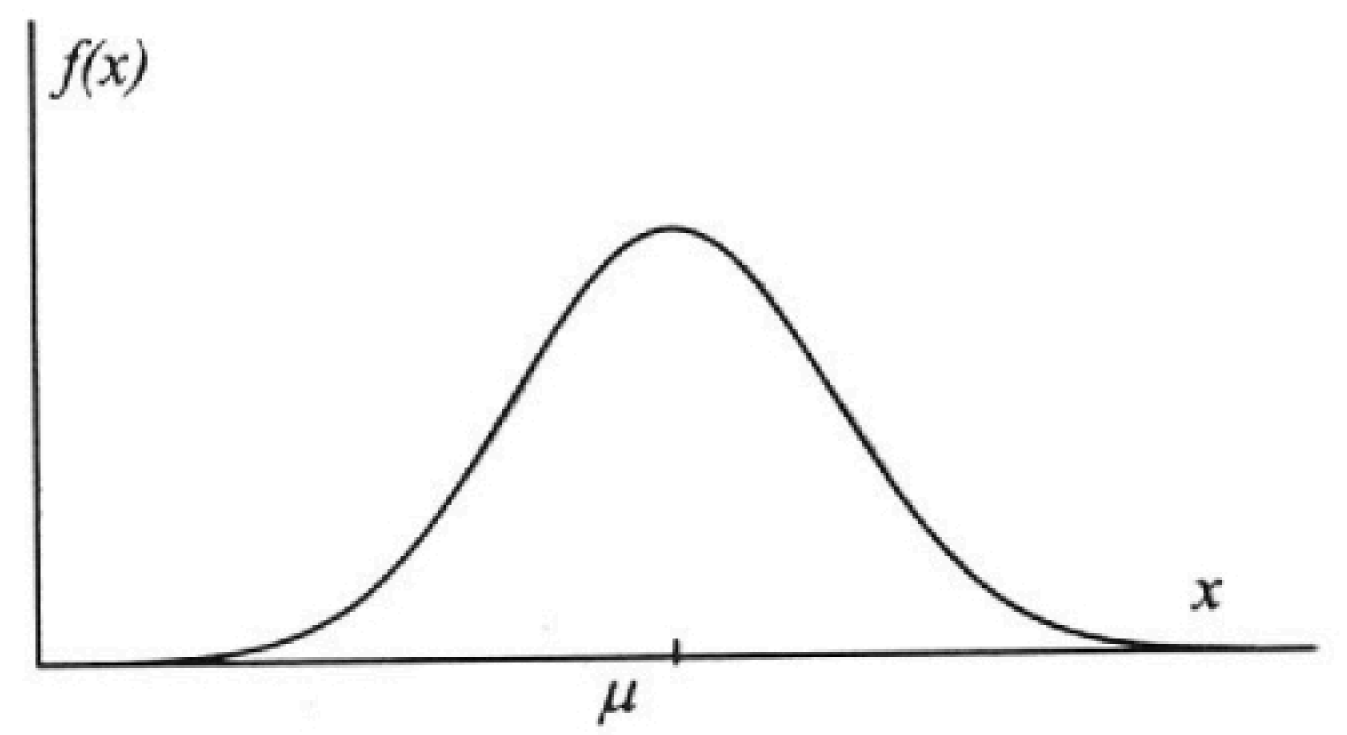
نادرا ما يستطيع الإحصائي معرفة التوزيع الاحتمالي المناسب لنتائج التجربة التي يقوم بها. وقد يكون قادرا، بالاستفادة من خبرة سابقة في تجارب مماثلة أن يتكهّن بشكل التوزيع كأن يقول إنه من عائلة التوزيعات الطبيعية، وهذا يعني أن الصيغة الرياضية لدالة الكثافة الاحتمالية هي من النوع:

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

حيث

$$;-\infty<x<+\infty\,;-\infty<\mu<+\infty\,,\ \sigma^2>o.$$

ولكن هذه العائلة تتضمن من الأفراد بقدر ما يتضمن النصف العلوي من المستوى الإقليدي من النقاط، فكل نقطة (μ,σ^2) تحدد تماما دالة كثافة طبيعية [انظر الشكل رقم (٢-١)].



الشكل رقم (٢-١). دالة كثافة لتوزيع طبيعي.

وتسمى مجموعة النقاط $\{(\mu, \sigma^2) \mid -\infty < \mu < +\infty; \sigma^2 > o\}$ فضاء المعالم لعائلة التوزيعات الطبيعية. لاحظ أن هذا الفضاء يشكل نوعا من الفهرسة لأفراد العائلة، فإحداثيات كل نقطة (μ_0, σ_0^2) تحدد قيمة للمعلمة μ وقيمة للمعلمة σ^2، وبالتالي تحدد تماما فردا من أفراد العائلة الطبيعية. والمطلوب من الإحصائي أن يقدِّر ذلك الفرد من العائلة المناسب لتجربته. ويبقى أحد الأهداف الرئيسة للإحصاء الحصول على تقدير لقيم المعالم التي تتضمنها الصيغة العامة لتوزيع ما (تقدير p احتمال النجاح في توزيع ذي الحدين، $f(x;n,p)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}, x=0,1,\ldots,n$ ، تقدير λ في توزيع بواسون $f(x;\lambda)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!}, x=0,1,\ldots$ ...إلخ). **وعلى سبيل المثال** يرغب الإحصائي في تقدير متوسط الزيادة في الإنتاج عند استخدام سلالة جديدة من القمح في منطقة زراعية معينة، أو يرغب في تقدير فعّالية لقاح جديد مقاسة بقدرة اللقاح على تخفيض عدد الإصابات بمرض معين، أو يرغب في تقدير الفرق بين نتائج طريقتين لتصفية مادة كيميائية. ولو أمكن تكرار التجربة نفسها، تجربة قياس متغير عشوائي X، عددا كبيرا جدا من المرات فسيكون من الممكن الوصول إلى قيم تقريبية جيدة لمعالم توزيع X، ولكن نادرا ما يكون من الممكن القيام بذلك، وقد يكون ذلك مكلفا جدا، وقد يستغرق زمنا طويلا، لا بل يمكن أن تهدم مثل هذه الطريقة هدف التجربة نفسه، **فعلى سبيل المثال**، إذا اختبرنا كل صاروخ يتم إنتاجه فلن يبق منها شيء للاستخدام. ويبرز التحدي الحقيقي للإحصاء عندما يكون عدد التكرارات صغيرا، وعندما يصبح من الضروري استخدام كل نتفة من المعلومات التي يقدمها لنا هذا العدد الصغير من التكرارات للقيام بتقدير جيد لمعلمة، أو، بصورة عامة، للقيام باستقراء إحصائي حول القيمة الحقيقية لمعلمة.

تعريف (١)

أي شيء يمكن استخدامه للتمييز بين توزيع وآخر ضمن عائلة من التوزيعات يسمى معلمة.

تعريف (٢)

تسمى مجموعة كافة القيم الممكنة لمتجه من المعالم $(\theta_1, \dots, \theta_k)$ فضاء المعالم.

وفي حالة معلمة واحدة θ أي $k = 1$، يكون فضاء المعالم هو مجموعة كافة القيم الممكنة لـ θ.

ونلاحظ من هذا التعريف أن عدد أبعاد فضاء المعالم يساوي عدد المركبات في متجه المعالم، $k = 2$، مثلا، في حالة التوزيع الطبيعي.

مثال (١)

في توزيع ذي الحدين (الثنائي) ليكن p احتمال النجاح فعندئذ تمثل دالة الاحتمال:

$$f(x;p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \; ; x = 0,1,\dots n, o < p < 1$$

عائلة من توزيعات ذي الحدين وتشكل نقاط الفترة $(0, 1)$ من المحور الحقيقي فضاء المعالم.

مثال (٢)

في توزيع بواسون تمثل الدالة:

$$f(x,\lambda) = e^{-\lambda} \lambda^x / x! \, , \; x = 0,1,\dots ; \lambda > 0$$

عائلة من توزيعات بواسون، ويشكل النصف الموجب من المحور الحقيقي فضاء المعالم.

(٢-٣) فضاء المعاينة

نحصل عند القيام بسلسلة من التكرارات لتجربة قياس متغير عشوائي على مجموعة من النتائج وإذا كان المجرب مقتنعا بأن شروط التجربة بقيت عمليا ثابتة، وأن التكرارات كانت مستقلة بعضها عن بعض، فعندئذٍ يُقال إن هذه المجموعة من النتائج عينة عشوائية. وهي كما أسلفنا عينة عشوائية من مجتمع القياسات الموافق للمتغير العشوائي الذي يجري قياسه، أو عينة عشوائية من التوزيع الاحتمالي الذي يصف هذا المجتمع من القياسات، أو اختصارا عينة عشوائية من التوزيع الاحتمالي.

ليكن X القياس أو المشاهدة التي نحصل عليها كنتيجة للتجربة، فنعتبر X متغيرا عشوائيا له دالة كثافة أو دالة احتمال $f(x)$، وفقا لما إذا كان المتغير مستمرا أو منفصلا، على الترتيب. وتسمى متتالية من n من النتائج المستقلة لقيم X: x_1، x_2، . . . ، x_n عينة حجمها n من التوزيع الاحتمالي $f(x)$. ويمكن التعبير عن العينة كنقطة في فضاء ذي n بعدا $(x_1, x_2,..., x_n)$، وتسمى مجموعة كافة العينات ذات الحجم n التي يمكن تصّورها، أو بصورة مبسطة وأقل تجريدا، مجموعة كافة العينات التي كنا سنحصل عليها لو أننا كررنا أخذ عينة حجمها n من مجتمع القياسات مرة بعد أخرى، إلى ما لا نهاية له، فضاء المعاينة. وتجدر ملاحظة أننا تحدثنا آنفا عن فضاء سميناه فضاء المعالم، والاستقراء الإحصائي هو، إلى حد كبير، حوار بين هذين الفضاءين، فضاء المعالم وفضاء المعاينة. وهكذا ننظر، قبل أخذ العينة، إلى النتيجة الأولى أو التكرار الأول كمتغير عشوائي X_1، وإلى النتيجة الثانية أو التكرار الثاني كمتغير عشوائي X_2، وهكذا حتى نصل إلى النتيجة الأخيرة أو التكرار الأخير فنعتبره متغيرا عشوائيا X_n.

وتمثل العينة قبل أخذها متغيرا عشوائيا مركبا، أو متجها عشوائيا ذا n مركبة $(X_1, X_2, ..., X_n)$. وبعد أخذ العينة نحصل على قيم محددة $(x_1, x_2, ..., x_n)$ أي نحصل على

نقطة من نقاط فضاء المعاينة. ومن الواضح مجموعة جميع القيم الممكنة للمتجه العشوائي $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ هي بالضبط فضاء المعاينة. ونؤكد هنا على نقطتين أولاهما أن لكل من المتغيرات X_1 ، X_2، . . . ، X_n دالة الكثافة أو دالة الاحتمال نفسها وهي $f(x)$. وثانيتهما أن هذه المتغيرات مستقلة بعضها عن بعض.وهكذا نصل إلى التعريفين التاليين :

تعريف (٣)

ليكن المتجه العشوائي $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$، إذا كان لكل من مركباته، وعددها n ، التوزيع نفسه $f(x)$، وكانت المركبات مستقلة بعضها عن بعض قلنا إن X_1، X_2 ، .... ، X_n عينة عشوائية من $f(x)$.

تعريف (٤)

تسمى مجموعة كافة القيم الممكنة للمتجه العشوائي $(X_1,\ldots,X_n)$ الذي يمثل عينة عشوائية ، فضاء المعاينة.

ونلاحظ من هذا التعريف أن عدد أبعاد فضاء المعاينة هو دائما مساو لحجم العينة n.

مثال (٣)

لتكن (X_1, X_2) عينة حجمها 2 من التوزيع الطبيعي . إذا اتخذنا المحور الاحداثي السيني لتمثيل قيم المتغير الأول X_1 والمحور الاحداثي الصادي لتمثيل قيم المتغير الثاني X_2 فإن كل نقطة من المستوى الاحداثي X_1oX_2 يمثل عينة ممكنة ، ويكون فضاء المعاينة هو مجموعة نقاط المستوى الاحداثي.

ونحتاج في الاستقراء الإحصائي لمعرفة دالة الكثافة المشتركة أو دالة الاحتمال المشتركة للعينة، أي للمتغير العشوائي المركب $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$، وقد يبدو للوهلة الأولى أن مثل هذه المسألة معقدة جدا، ومن حسن الحظ أن عشوائية العينة تجعل المسألة ميسّرة تماما. إذ يسمح لنا استقلال المركبات بكتابة:

$$f(x_i) \prod_{i=1}^{n} L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1)\,(x_2)\,\ldots f(x_n) \qquad (١)$$

وحيثما نذكر كلمة عينة في هذا الفصل وفيما يليه من فصول فإننا نقصد عينة عشوائية سواء ذكرنا كلمة عشوائية أم لم نذكرها.

مثال (٤)

لتكن X_1، X_2، ...، X_n عينة من توزيع بيرنوللي. اكتب دالة الاحتمال المشتركة للعينة.

دالة الاحتمال لتوزيع بيرنوللي مع احتمال نجاح p هي كما نعلم:

$$f(x; p) = p^x q^{1-x}, x = 0,1$$

وتكون دالة الاحتمال المشتركة للعينة وفقا للعلاقة (١):

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; p) = p^{x_1} q^{1-x_1} . p^{x_2} q^{1-x_2} \ldots p^{x_n} q^{1-x_n}$$

$$= p^{\Sigma x_i} q^{n-\Sigma x_i} \quad , x_i = 0,1 \text{ لجميع } i=1,2,\ldots,n \qquad (٢)$$

مثال (٥)

لتكن X_1، X_2، ...، X_n عينة من التوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$. اكتب دالة الكثافة المشتركة للعينة.

دالة الكثافة للتوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ هي، $f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$

حيث $-\infty < x < +\infty$، ودالة الكثافة المشتركة للعينة وفقا للعلاقة (١) هي:

$$L(x_1;x_2,\dots,x_n;\ \mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_1-\mu)^2}\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_2-\mu)^2}\cdots\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_n-\mu)^2}$$

$$=(2\pi\sigma^2)^{-n/2}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} \qquad (٣)$$

(٢-٤) بعض خواص العينات

نعرّف المتغير العشوائي بأنه دالة حقيقية معرفة على فضاء عينة، لنفرض أننا نعلم بأن X، نتيجة تجربة معينة، يتبع التوزيع الطبيعي $N(\mu,\ \sigma^2)$، ولكننا لا نعلم قيم معلمتي التوزيع μ و σ^2؛ فالكمية $\frac{X-\mu}{\sigma}$ هي بدورها متغير عشوائي، وقد وجدنا سابقا أن هذا المتغير يتبع التوزيع الطبيعي $N(0,\ 1)$، ويمكننا حساب احتمالات حوادث معبر عنها بدلالة هذا المتغير المعياري، كما يمكن استخدامه في مناقشات نظرية، إلا أنه لا يمكن معرفة قيمته من خلال نتائج تجربة معينة طالما أن μ و σ^2 غير معروفين. وعلى أي حال هناك الكثير من المتغيرات العشوائية التي يمكننا حساب قيمها بعد إنجاز تجربة معينة، وهذه المتغيرات هي دوال في المقادير X_1، X_2، . . . ، X_n التي تمثل نتائج التجربة ولا تتضمن أية معالم غير معروفة وتسمى تمييزا لها بالإحصاءات.

تعريف (٥)

الإحصاء هو أي دالة في مقادير العينة X_1، X_2، . . . ، X_n لا تحوي معلمة غير معروفة.

لتكن X_1، X_2، . . . ، X_n عينة من توزيع احتمالي، فإذا لم يكن شكل هذا التوزيع معروفا فقد يرغب الإحصائي في تقديره أو تقدير بعض خواصه. وسنستعرض فيما يلي عددا من الإحصاءات التي يمكن استخدامها لتقدير بعض الخواص التي عرّفناها في الفصل السابق. ولتقدير متوسط التوزيع μ نأخذ مثلا متوسط العينة $\overline{X}$ حيث:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad (٤)$$

ومن أجل عينة كبيرة جدا يجب أن نتوقع قيمة لـ $\overline{X}$ قريبة من μ. وفي الحقيقة أعطينا في مطلع الفصل السابق تفسيرا لمفهوم المتوسط قائما على مثل هذا التوقع، كما سنجد في فقرة لاحقة من هذا الفصل مسوغا رياضيا لمثل هذا التوقع.

وهناك من الأسباب ما يدعونا لاعتبار $\overline{X}$ تقديرا لـ μ مهما كان حجم العينة. وتنبغي ملاحظة أن $\overline{X}$ إحصاء وله توزيع احتمالي، وباستخدام القواعد المعطاة في الفصل السابق نحسب القيمة المركزية لهذا التوزيع الاحتمالي أي متوسطه كما يلي:

$$E[\overline{X}] = E\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{1}{n}E\sum_{1}^{n} X_i = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} E(X_i) = \frac{n\mu}{n} = \mu \qquad (٥)$$

ونعبر عن ذلك بقولنا إن $\overline{X}$ هو مقدِّر غير منحاز لمتوسط التوزيع μ. ويمكن تفسير العلاقة (٥) كما يلي:

إذا أخذنا عددا كبيرا جدا من العينات حجم كل منها n، وحسبنا قيمة $\overline{X}$ في كل عينة فسيكون متوسط هذه القيم مساويا تقريبا لـ μ. وتوزيع المعاينة لـ $\overline{X}$ يتمركز حول النقطة μ نفسها التي يتمركز عندها التوزيع الذي جاءت منه العينة.

لنحسب الآن انتشار توزيع $\overline{X}$ حول المركز μ، فقد رأينا في الفصل السابق أن تباين مجموع متغيرات مستقلة يساوي مجموع تبايناتها، مما يسمح لنا بكتابة:

$$\begin{aligned} Var(\overline{X}) &= \sigma^2_{\overline{X}} = \frac{1}{n^2}Var[X_1 + \ldots + X_n] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned} \qquad (٦)$$

حيث يمثل σ^2 تباين التوزيع الاحتمالي الذي أخذنا منه العينة. وهكذا يكون $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$، أي أن الانحراف المعياري لـ $\overline{X}$ هو $\frac{1}{\sqrt{n}}$ من الانحراف المعياري للتوزيع الذي جاءت منه العينة.

وهنا تتضح عدة نقاط مهمة:

١- تباين توزيع المعاينة للمتوسط $\overline{X}$ أصغر بـ n مرة من تباين التوزيع الذي جاءت منه العينة، وهذا يعني أننا إذا أخذنا عينات متكررة من التوزيع، وحسبنا متوسط كل منها، فسنجد أن قيم هذه المتوسطات تحتشد أو تتجمع حول μ بشكل أقوى بكثير من تجمّع أو احتشاد قيم X حول مركزها μ.

٢- يمكن التحكم بتباين $\overline{X}$ وجعله صغيرا من خلال زيادة حجم العينة n. أي أن حجم العينة n يشكل صمّام أمان تجدر الاستفادة منه للوصول إلى استقراءات إحصائية جيدة. إلا أن مقدرتنا على استخدام صمام الأمان هذا منوطة بالاستعداد لبذل كافة النفقات والجهود التي يتطلبها أخذ عينة. وتصبح المسألة هنا مسألة اقتصادية إذ نريد، لقاء نفقة معينة، الوصول إلى قرارات إحصائية أو تنبؤات إحصائية سليمة حول خصائص مجتمع اعتمادا على عينة نأخذها من هذا المجتمع، وتهدف نظرية الإحصاء كما أسلفنا إلى تقديم طرق كفؤة تسمح لنا القيام باستقراءات جيدة من خلال عينات صغيرة نسبيا.

٣- كلما كان المجتمع المدروس أقل تجانسا (تباينه σ^2 كبير) اضطررنا إلى زيادة حجم العينة كي نحافظ على مستوى مرضٍ لسلامة وجودة القرار أو التنبؤ الإحصائي.

تعريف (٦)

نعرف عزم العينة من المرتبة k بأنه:

$$m'_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, \quad k = 1,2,\ldots \qquad (٧)$$

وإذا أردنا تقدير العزم من المرتبة k من عزوم التوزيع أي $\mu'_k = E[X^k]$ نحسب عزم العينة من المرتبة k المعرّف بالعلاقة (٧) أي $m'_k = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} X_i^k$ و m'_k إحصاء له توزيع احتمالي متوسطه:

$$E(m'_k)=\frac{1}{n}E[\sum_{i}^{n}X_i^k]=\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}E(X_i^k)=\mu'_k \qquad (٨)$$

وكذلك نجد تباين m'_k من العلاقة :

$$Var(m'_k)=\frac{1}{n^2}Var\left[\sum_{i}^{k}X_i^k\right]=\frac{1}{n^2}\sum_{i}^{n}Var(X_i^k)$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i}^{n}\left\{E\left(X_i^{2k}\right)-\left[E(X_i^k)\right]^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left[\mu'_{2k}-\mu'^2_k\right] \qquad (٩)$$

تعريف (٧)

نعرِّف عزم العينة المركزي من المرتبة k بأنه :

$$m_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k \qquad (١٠)$$

ولتقدير العزم المركزي من المرتبة r أي $\mu_r = E(X-\mu)^r$ ، نأخذ عزم العينة المركزي من المرتبة r، أي :

$$m_r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^r$$

وسيكون $\bar{x}$ ، في حالة عينات كبيرة الحجم، قريبا من μ، وبالتالي يكون m_r قريبا من μ_r. ونادرا ما يرغب الباحث تقدير عزم مركزي من مرتبة أكبر من 2. والعزم المركزي من المرتبة الثانية هو التباين $\sigma^2 = E(X_i - \mu)^2$ ، ولدينا في هذه الحالة :

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]=n\sigma^2 \qquad (١١)$$

مطابقة مفيدة

سنجد المطابقة التالية مفيدة نظريا في أكثر من مناسبة :

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\equiv\sum_{1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+n(\overline{X}-\mu)^2 \qquad (١٢)$$

البرهان :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 &\equiv \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\overline{X})+(\overline{X}-\mu)\right]^2\\ &=\sum_{1}^{n}\left[(X_i-\overline{X})^2+2(\overline{X}-\mu)(X_i-\overline{X})+(\overline{X}-\mu)^2\right]\\ &=\sum_{1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+2(\overline{X}-\mu)\sum_{1}^{n}(X_i-\overline{X})+\sum_{1}^{n}(\overline{X}-\mu)^2\\ &=\sum_{1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+n(\overline{X}-\mu)^2\end{aligned}$$

ويختفي الحد الأوسط لأن $\sum_{1}^{n}(X_i-\overline{X})=0$. لاحظ أن $\sum_{1}^{n}(X_i-a)^2$ حيث a أي عدد ثابت يكون أصغر ما يمكن عندما يكون $a=\overline{X}$. أي أن مجموع مربعات انحرافات عدد من المشاهدات حول متوسطها الحسابي أصغر من مجموع مربعات انحرافاتها حول أي عدد آخر.

باستخدام المطابقة (١٢) يمكن حساب $E\left[\sum_{1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]$ بسهولة، ذلك لأن:

$$E\left[n(\overline{X}-\mu)^2\right]=nE(\overline{X}-\mu)^2=n\,Var(\overline{X})=n\frac{\sigma^2}{n}=\sigma^2 \qquad (١٣)$$

وبالتالي:

$$E\left[\sum_{1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=E\left[\sum_{1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]-E\left[n(\overline{X}-\mu)^2\right]=n\sigma^2-\sigma^2=(n-1)\sigma^2 \qquad (١٤)$$

مما يقترح علينا استخدام الإحصاء:

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n(n-1)}\left[n\sum_{1}^{n}X_i^2-\left(\sum_{1}^{n}X_i\right)^2\right] \qquad (١٥)$$

كتقدير للتباين σ^2. والعلاقة (١٤) تعني أن $E(S^2)=\sigma^2$. ويسمى الإحصاء S^2 المعرف في (١٥) تباين العينة، كما يسمى S الانحراف المعياري للعينة، وسنرى مستقبلا أن $E(S)\neq\sigma$.

(٢–٥) توزيع متوسط عينة مأخوذة من توزيع طبيعي

لتكن X_1، . . . ، X_n عينة عشوائية من توزيع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$. لدينا من (٢٥ب) من الفصل الأول أن دالة العزوم لكل $X_i (i = 1,...,n)$ هي :

$$M_{X_i}(t) = exp\left[\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \mu t\right]$$

وبما أن المتغيرات X_i مستقلة بعضها عن بعض، يمكن الاستفادة من (٤٥) من الفصل الأول لنجد :

$$M_{\Sigma X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = exp\left[\frac{1}{2}n\sigma^2 t^2 + n\mu t\right] \quad (١٦)$$

وبتطبيق العلاقة (٢٣) من الفصل الأول نجد دالة العزوم للمتوسط $\overline{X} = \frac{1}{n}\overset{n}{\Sigma} X_i$:

$$M_{\overline{X}}(t) = M_{\Sigma X_i}\left(\frac{t}{n}\right) = \exp\left[\frac{1}{2}\,\frac{\sigma^2}{n}t^2 + \mu t\right] \quad (١٧)$$

وهي دالة العزوم لتوزيع طبيعي متوسطه μ وتباينه $\frac{\sigma^2}{n}$. ووفقا لنظرية الوحدانية نستنتج أن توزيع متوسط عينة حجمها n من توزيع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ هو بدوره توزيع طبيعي بالمتوسط نفسه μ ولكن بتباين $\frac{\sigma^2}{n}$، وبالطبع يكون توزيع المتغير $\frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{\sigma}$ هو التوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$.

وإذا كان $\overline{X}$ و $\overline{Y}$ متوسطي عينتين مستقلتين حجماهما n_1 و n_2، على الترتيب، من توزيعين طبيعيين الأول $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ والثاني $N(\mu_2, \sigma_2^2)$، فيمكننا، بصورة مماثلة، كتابة :

$$M_{\overline{X}-\overline{Y}}(t) = M_{\overline{X}}(t).M_{-\overline{Y}}(t) = M_{\overline{X}}(t).\ M_{\overline{Y}}(-t)$$

$$= exp\left[\frac{1}{2}\,\frac{\sigma_1^2}{n_1}t^2 + \mu_1 t\right].exp\left[\frac{1}{2}\,\frac{\sigma_2^2}{n_2}t^2 - \mu_2 t\right]$$

$$= exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)t^2 + (\mu_1 - \mu_2)t\right] \quad (١٨)$$

وهي دالة عزوم توزيع طبيعي متوسطه μ_1 - μ_2 وتباينه $\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$. أي أن المتغير $\overline{X}-\overline{Y}$ يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط (μ_1 - μ_2) وتباين $\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$.

(٢-٦) قانون الأعداد الكبيرة

في الفصل السابق فسرنا $E[X]$ بأنه متوسط قيم X على المدى الطويل (لنقل، مثلا، متوسط عينة حجمها كبير جدا). ولهذا المتوسط توزيع احتمالي. ولا شك أننا نهتم، بصورة خاصة، بهذا التوزيع الاحتمالي لأنه قد يدعم مثل هذا التفسير لمفهوم التوقع أو لا يدعمه. ومن حسن الحظ أنه يدعم مثل هذا التفسير، وتدعى إحدى النتائج المتعلقة بهذا التوزيع "**قانون الأعداد الكبيرة**" مما سنناقشه في هذه الفقرة.

لتكن X_1، X_2، . . . ، X_n عينة حجمها n من توزيع احتمالي متوسطه $\mu = E(X)$ وتباينه $\sigma^2 = Var(X)$ موجودان. فيقول قانون الأعداد الكبيرة إنه من أجل أي عدد δ، مهما كان صغيرا، لدينا:

$$Pr\left\{\mu-\delta<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i<\mu+\delta\right\}\to 1$$

عندما ينتهي n إلى اللانهاية.

أي أن احتمال وقوع متوسط عينة كبيرة ضمن فترة صغيرة حول متوسط التوزيع الذي جاءت منه العينة يمكن جعله قريبا من الواحد، بالقدر الذي نريد، وذلك بأخذ n كبير بكفاية.

برهان

نعلم أن $E\left[\frac{\Sigma X_i}{n}\right]=\mu$ ، $Var\left[\frac{\Sigma X_i}{n}\right]=\frac{\sigma^2}{n}$

وبتطبيق متباينة تشيبيشيف نجد :

$$Pr\left\{\left|\frac{\Sigma X_i}{n}-\mu\right|\geq k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}\leq\frac{1}{k^2}$$

وبأخذ $k=\frac{\sqrt{n}\delta}{\sigma}$ نجد :

$$Pr\left\{\left|\frac{\Sigma X_i}{n}-\mu\right|\geq\delta\right\}\leq\frac{\sigma^2}{n\delta^2}$$

ولذلك ، ومن أجل δ مثبّت ، يمكننا أن نكتب :

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left\{\left|\frac{\Sigma X_i}{n}-\mu\right|\geq\delta\right\}=0$$

أو بصورة مكافئة.

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left\{\mu-\delta<\frac{\Sigma X_i}{n}<\mu+\delta\right\}=1 \qquad (١٩)$$

وهو المطلوب.

ويمكن استخدام قانون الأعداد الكبيرة لدعم التفسير العملي الذي نقدمه عادة لمفهوم احتمال حادثة بأنه التكرار النسبي لوقوع الحادثة في عدد كبير جدا من التكرارات. فلنأخذ أي تجربة عشوائية ولتكن A حادثة متصلة بهذه التجربة ، وفي كل مرة يتكرر تنفيذ التجربة إما أن تقع الحادثة A أو لا تقع. لنعرّف متغيرا عشوائيا Y يساوي 1 إذا وقعت الحادثة ويساوي الصفر فيما عدا ذلك ، ويكون توزيع Y هو توزيع بيرنوللي. لنرمز لاحتمال النجاح أي احتمال وقوع A بالرمز p فيمكن كتابة توزيع Y كما يلي :

y	0	1
$f(y)$	$q=1-p$	p

ومن الواضح أن $E(Y)=p$.

لنفرض أننا كررنا التجربة بصورة مستقلة n مرة، فعندئذ يمثل المتوسط $\sum_{i=1}^{n} y_i / n$ ، نسبة المرات التي وقعت فيها الحادثة A، أي التكرار النسبي لوقوع A عند تكرار التجربة n مرة. واستنادا إلى قانون الأعداد الكبيرة نجد أنه يمكن جعل احتمال وقوع التكرار النسبي $\bar{y} = \sum_{1}^{n} y_i / n$ ضمن أي فترة صغيرة حول p قريبا، بالقدر الذي نريد، من الواحد وذلك بزيادة عدد التكرارات n بصورة كافية.

نتيجة (١) (نظرية بيرنوللي)

إذا كان S_n عدد النجاحات في n تكرار مستقل لتجربة بيرنوللي باحتمال نجاح p، وكان $\varepsilon > 0$ فعندئذ:

$$Pr\left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} \to 0 \qquad (٢٠)$$

عندما $n \to \infty$.

أو:

$$Pr\left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \to 1 \qquad (٢١)$$

عندما $n \to \infty$.

(٢-٧) نظرية النهاية المركزية

رأينا أن متوسط عينة مأخوذة من توزيع طبيعي يتبع بدوره التوزيع الطبيعي. وسنرى في هذه الفقرة أن هذه الخاصة تبقى محققة، بصورة تقريبية، بصرف النظر، تقريبا، عن ماهية التوزيع الذي نأخذ منه العينة، شريطة أن يكون حجم العينة كبيرا بكفاية. وتدعى هذه النتيجة المدهشة من نتائج نظرية الاحتمالات "نظرية النهاية المركزية"، وهكذا فإننا لا نعلم، فقط، أن توزيع متوسط عينة $\overline{X}$ يتمركز حول متوسط التوزيع الذي جاءت منه $E(X)$، ولكننا نعلم، أيضا، الشكل التقريبي لهذا التوزيع.

نظـــــرية

من أجل عينة X_1، X_2، ...، X_n من توزيع متوسطه μ وتباينه σ^2، يتقارب توزيع متوسط العينة $\overline{X}$ إلى التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين $\frac{\sigma^2}{n}$، وذلك عندما ينتهي n إلى اللانهاية. أي أن دالة التوزيع للمتغير العشوائي $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ تتقارب إلى دالة التوزيع الطبيعي المعياري.

برهـــــان

سيكون البرهان بسيطا تماما إذا فرضنا أن للتوزيع الذي نأخذ منه العينة دالة عزوم منتهية. ونقدم البرهان هنا في هذه الحالة الخاصة.

نعلم أن $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^z$ ، ومنه يمكن البرهان بسهولة على أن:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z+\delta_n}{n}\right)^n=e^z \qquad (٢٢)$$

حيث $\{\delta_n\}$ متوالية تنتهي إلى الصفر. ذلك لأنه من أجل أي عدد صغير $\delta>0$ يمكن أخذ n كبير بكفاية بحيث أن $|\delta_n|<\delta$ ، ومن خاصة الاستمرار نجد أن الطرف الأيسر من (٢٢) سينتهي إلى قيمة تقع بين $e^{z+\delta}$ و$e^{z-\delta}$. وبما أن δ مقدار صغير بصورة كيفية فإن العلاقة (٢٢) صحيحة. ولبرهان النظرية نحسب أولا دالة العزوم للمتغير:

$$\sqrt{n}\,(\overline{X}-\mu)=\sqrt{n}\left\{\frac{\Sigma X_i-n\mu}{n}\right\}=\frac{X_1-\mu}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{X_n-\mu}{\sqrt{n}},$$

ثم نأخذ النهاية عندما $n\to\infty$. نحسب أولا دالة عزوم الانحراف $X_i-\mu$ فنجد:

$$M_{x_i-\mu}(t)=1+\frac{1}{2}\sigma^2t^2+\mu_3\frac{t^3}{3!}+\mu_4\frac{t^4}{4!}+\ldots$$

حيث μ_3، μ_4، ... هي العزوم المركزية للتوزيع الذي أخذنا منه العينة. ومنه تكون دالة العزوم للمتغير $(X_i-\mu)/\sqrt{n}$ هي:

$$M_{\frac{X_i-\mu}{\sqrt{n}}}(t)=1+\frac{\sigma^2t^2}{2!n}+\mu_3\frac{t^3}{3!n^{3/2}}+\mu_4\frac{t^4}{4!n^2}+\ldots$$
$$=1+\frac{\sigma^2t^2+\delta_n}{2n}$$

حيث $\delta_n \to 0$ عندما $n \to \infty$. وبملاحظة أن المتغيرات X_i مستقلة نجد:

$$M_{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}(t)=\left(1+\frac{\sigma^2t^2+\delta_n}{2n}\right)^n$$

وباستخدام العلاقة (٢٢) نجد أخيرا أن:

$$\lim_{n\to\infty} M_{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}(t)=e^{\frac{1}{2}\sigma^2t^2} \qquad (٢٣)$$

وهي دالة عزوم توزيع طبيعي متوسطه الصفر وتباينه σ^2. أي أن توزيع $\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)$ ينتهي إلى التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتباين σ^2 عندما $n \to \infty$. وبالتالي فإن توزيع $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ هو التوزيع الطبيعي المعياري.

وغالبا ما يكون التقريب جيدا تماما من أجل عينات صغيرة حجومها بين $n = 10$ إلى $n = 15$. وإذا كان للتوزيع الذي نأخذ منه العينة "**ذيل**" طويل في أي من الاتجاهين، فسنحتاج، من أجل درجة التقريب نفسها إلى عينات من حجم أكبر.

ويمكن تعميم نظرية النهاية المركزية إلى حالة عينات من توزيع متعدد المتغيرات، وعندئذ يوجد متوسط عينة لكل مركبة، وينتهي التوزيع المشترك لهذه المتوسطات إلى التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات (وهو تعميم للتوزيع الطبيعي ذي المتغيرين الذي استعرضناه في الفصل الأول). كما يمكن تعميم النظرية بحيث يكون لكل من المتغيرات المستقلة X_1، ...، X_n توزيعه الخاص بدلا من كونها عينة من التوزيع نفسه.

وتلقي نظرية النهاية المركزية الضوء على سبب خضوع العديد من الظواهر المدروسة في التطبيقات العملية، ولو بصورة تقريبية، لقانون التوزيع الطبيعي. ذلك

لأنه لو فرضنا أن انحراف كمية ملحوظة عن متوسطها الحقيقي $(x_i-\mu)$ يعود إلى العديد من الأسباب المستقلة، في مجال تأثيرها، بعضها عن بعض، وأن كلا من هذه الأسباب يسهم بقسط ضئيل في تكوين هذا الانحراف. فعلى أساس من التعميم الأخير للنظرية المذكورة أعلاه، يصبح من الطبيعي أن نتوقع كون مجموع هذه المساهمات، أي الانحراف الكلي، خاضعا تقريبا لقانون التوزيع الطبيعي.

(٢-٨) التقريب الطبيعي للتوزيع ذي الحدين (الثنائي)

يمكن أن يكون حساب احتمالات الحوادث في حالة التوزيع الثنائي عملا شاقا وطويلا. ويقدّم توزيع بواسون تقريبا معقولا عندما يكون n كبيرا و p صغيرا. أما التوزيع الطبيعي فيقدم تقريبا جيدا عندما يكون n كبيرا ولا يكون p قريبا من الصفر أو الواحد. وسندرس الآن هذا التقريب كتطبيق مباشر لنظرية النهاية المركزية.

يبرز التوزيع الثنائي (n, p) في حالة تجربة ننفذها سعيا وراء حادثة معينة احتمال وقوعها يبقى ثابتا عندما نكرر التجربة نفسها وليكن p مثلا، ونسجل عدد وقوعات هذه الحادثة Y عند تكرار التجربة n مرة. وكما نعلم فإنه يمكن التعبير عن المتغير Y (وهو عدد النجاحات) كمجموع n من متغيرات بيرنوللي المستقلة Y_i حيث Y_i متغير عشوائي يساوي الواحد إذا وقعت الحادثة في التكرار i ويساوي الصفر فيما عدا ذلك. أي أنه يمكن كتابة Y على الشكل:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i \qquad (٢٤)$$

وهكذا يحقق المتغير Y كافة شروط نظرية النهاية المركزية، مما يسمح لنا بالقول إن توزيع المتغير العشوائي:

$$\frac{Y - np}{(npq)^{1/2}} \qquad (٢٥)$$

ينتهي إلى التوزيع الطبيعي المعياري عندما $n \to \infty$.

ويكون هذا التقارب إلى التوزيع الطبيعي سريعا عندما تكون قيمة p بعيدة عن القيمتين المتطرفتين 0 و1 . وفي الحقيقة يصبح التقريب مناسبا تماما من أجل حجم صغير لِ n مثل $n = 15$ إلى $n = 20$، ولكن عندما تقترب p من الصفر أو الواحد فإن قيما كبيرة لِ n تصبح ضرورية للحصول على درجة الدقة نفسها.

وكتوضيح لنأخذ قيمة صغيرة جدا لِ n ونقارن التوزيعين. ليكن التوزيع الثنائي $n = 10$ ، $p=\frac{1}{2}$ فعندئذ تكون عبارة التوزيع الثنائي :

$$f(x)=\binom{10}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}, \quad x=0,1,2,\ldots,10$$

ودالة كثافة التوزيع الطبيعي المقابل بالمتوسط نفسه $\mu = np = 5$ والتباين نفسه $\sigma^2 = npq = 5/2$ هي :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{5\pi}}e^{-\frac{1}{5}(x-5)^2}, \quad -\infty<x<+\infty$$

وبالطبع فإن الدالة الأولى منفصلة والثانية مستمرة. ولتحسين درجة الدقة في التقريب نعتبر أن الاحتمال الموافق لعدد صحيح هو الاحتمال الموافق في حالة الاستمرار لفترة طولها واحدة القياس، يمتد نصفها على يمين العدد الصحيح ونصفها الآخر على يساره، أي أن الاحتمال الموافق للعدد الصحيح $X = 5$، مثلا، هو الاحتمال الموافق للفترة $\left(4\frac{1}{2}<X<5\frac{1}{2}\right)$. وهكذا نجد على سبيل المثال أن :

$$P_r\left[3\le X\le 5\right]\approx P_r\left[2\frac{1}{2}<X<5\frac{1}{2}\right]$$
$$=P_r\left[Z\le\frac{5\frac{1}{2}-5}{\sqrt{5/2}}\right]-P_r\left[Z\le\frac{2\frac{1}{2}-5}{\sqrt{5/2}}\right]=0.567$$

حيث Z المتغير الطبيعي المعياري. والقيمة الفعلية هي 0.568.

$$P_r[X=5]=P_r\left[4\frac{1}{2}<X<5\frac{1}{2}\right]$$
$$=P_r\left[Z\le\frac{5\frac{1}{2}-5}{\sqrt{5/2}}\right]-P_r\left[Z\le\frac{4\frac{1}{2}-5}{\sqrt{5/2}}\right]=0.248$$

والقيمة الفعلية هي 0.246.

(٢-٩) التقريب الطبيعي لتوزيع بواسون

ليكن X متغيرا عشوائيا يتوزع وفق قانون بواسون:

$$f(x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}\quad,\quad x=0,1,2,... \tag{٢٦}$$

ولنحسب دالة عزوم هذا التوزيع:

$$M_X(t)=E(e^{Xt})=\sum_{x=0}^{\infty}e^{xt}.\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$
$$=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^x.e^{-\lambda}}{x!}$$
$$=e^{-\lambda}.e^{\lambda e^t}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^x.e^{-\lambda e^t}}{x!}=e^{\lambda(e^t-1)}$$

ونبرهن الآن أن توزيع المتغير المعياري:

$$Y=\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

يتقارب إلى التوزيع الطبيعي المعياري عندما $\lambda\to\infty$. لدينا:

$$M_{X-\lambda}(t)=exp(\lambda e^t-\lambda-\lambda t)$$
$$M_Y(t)=exp(\lambda e^{t/\sqrt{\lambda}}-\lambda-\lambda^{\frac{1}{2}}.t)$$
$$=exp(\lambda+\lambda^{\frac{1}{2}}t+\frac{1}{2}t^2+\frac{t^3}{3!\lambda^{\frac{1}{2}}}+...-\lambda-\lambda^{\frac{1}{2}}t)$$
$$=exp(\frac{1}{2}t^2+\frac{t^3}{3!\lambda^{\frac{1}{2}}}+...)$$

وهذا المقدار ينتهي إلى $e^{\frac{1}{2}t^2}$ أي إلى دالة عـزوم التوزيع الطبيعي المعياري عنـدما $\lambda \to \infty$. وفي كثير من التطبيقات العملية يكون التقريب جيدا من أجل $\lambda > 25$.

مثال (٦)

لنفرض أن X متغير عشوائي متوسطه μ وتباينه $\sigma^2 = 100$. كم يجب أن يكون حجم العينة n بحيث لايحيد متوسط العينة $\overline{X}$ عن μ بأكثر من وحدتي قياس باحتمال 0.99؟

المطلوب تحديد n من المعادلة:

$$P_r\left\{\left|\overline{X}-\mu\right| \le 2\right\} = 0.99$$

أي

$$P_r\left\{\frac{-2\sqrt{n}}{10} < \frac{\overline{X}-\mu}{10/\sqrt{n}} < \frac{2\sqrt{n}}{10}\right\} = 0.99$$

وبالاستفادة من نظرية النهاية المركزية يمكن اعتبار التوزيع الطبيعي المعياري كتوزيع تقريبي للمتغير $\frac{\overline{X}-\mu}{10/\sqrt{n}}$ ، وهذا يسمح لنا بكتابة:

$$2\phi\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right) - 1 = 0.99$$

أو:

$$\phi\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right) = 0.995$$

$$n = 166 \quad ; \quad \frac{\sqrt{n}}{5} = 2.575$$

مثال (٧)

نريد إيجاد قيمة تقريبية جيدة لنسبة القطع المعيبة p في إنتاج مصنع وذلك بالاستفادة من المعاينة العشوائية. كم يجب أن يكون حجم العينة n بحيث يكون احتمال

أن لا تحيد نسبة المعيب في العينة ، $\overline{X}$ ، عن نسبة المعيب في إنتاج المصنع ، p ، بأكثر من واحد في العشرة ، هو احتمال لا يقل عن 0.95؟

إذا رمزنا لعدد القطع المعيبة في العينة بالرمز S واستخدمنا متباينة تشيبيشيف نجد :

$$P_r\left\{\left|\frac{S}{n}-p\right|<0.1\right\}\geq 1-\frac{pq}{n(0.1)^2}$$

ولكن $\frac{1}{4}\leq \frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-p\right)^2 = pq=p(1-p)=p-p^2$ مما يسمح لنا بكتابة $1-\frac{pq}{n/100}\geq 1-\frac{\frac{1}{4}}{n/100}$. ويتحقق المطلوب إذن بأخذ :

$$1-\frac{25}{n}\geq 0.95 \text{ أو } \frac{25}{n}\leq .05 \text{ أو } n\geq 500.$$

وبالطبع يمكن الاستفادة من توزيع S في حال معرفته ، ولو بصورة تقريبية ، للوصول إلى تحديد أفضل لقيمة n. وباستخدام نظرية النهاية المركزية وتقريب التوزيع الثنائي بالتوزيع الطبيعي نجد :

$$P_r\{|S-np|<0.1n\}\approx P_r\left\{\left|\frac{S-np}{\sqrt{npq}}\right|<\frac{0.1n}{\sqrt{npq}}\right\}$$
$$=2\phi\left(\sqrt{\frac{n}{100pq}}\right)-1$$

وبما أن $pq\leq\frac{1}{4}$ فإن :

$$2\phi\left(\sqrt{\frac{n}{100pq}}\right)-1\geq 2\phi\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)-1$$

وبأخذ $2\phi\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)-1\geq .95$ يتحقق المطلوب ، أي $\phi\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)\geq 0.975$ ، $\frac{\sqrt{n}}{5}\geq 1.96$ أو $n\geq 97$.

(٢-١٠) تمارين

١- اكتب دالة الكثافة المشتركة لعينة عشوائية حجمها n من كل من التوزيعات التالية :

(أ) $N(\mu, 1)$، $N(\mu_0, \sigma^2)$. (ب) توزيع بواسون.

(جـ) التوزيع الأسي (د) التوزيع المنتظم فوق الفترة $(0, \theta)$.

(هـ) توزيع باسكال (الهندسي) (و) التوزيع فوق الهندسي.

(ز) التوزيع جاما $f(x)=\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}, x>0, \alpha>0, \beta>0$

(ح) توزيع باريتو (Pareto) : $f(x)=\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}, x>1, \alpha>0$

(ط) توزيع رايلي $f(x)=2\alpha x e^{-\alpha x^2}, x>0, \alpha>0$

(ي) التوزيع بيتا $f(x)=\frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}, 0<x<1, a>0, b>0$

(ك) توزيع ويبل (Weibull) $f(t)=\frac{\alpha}{\beta^\alpha}t^{\alpha-1}e^{-(t/\beta)^\alpha}, t>0, \alpha>0, \beta>0$

(ل) توزيع كوشي $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}, -\infty<x<+\infty$

٢ - تحقّق من أنه يمكن كتابة تباين عينة على الشكل $S^2=\frac{n\overset{n}{\Sigma}x_i^2-(\Sigma x_i)^2}{n(n-1)}$.

٣- إذا كانت X_1، ....، X_n عينة من القياسات متوسطها $\bar{x}$ وتباينها S^2. بين أن متوسط مربعات الفروق بين كافة الأزواج من القياسات (X_i, X_j)، $i \neq j$ هو $2S^2$.

٤- إذا كانت X_1، ....، X_n عينة من مجتمع لا نهائي من القياسات فإن :
$Cov(X_r-\overline{X}, \overline{X})=0;\ r=1,2,\dots,n$.

٥- إذا كانت التجربة هي اختيار عينة عشوائية X_1، X_2، . . . ، X_n بدون إعادة من مجتمع منته يتضمن N قياسا $\{c_1, c_2, \dots, c_N\}$.

(أ) بيّن أن دالة الاحتمال المشتركة للعينة هي :

$$f(x_1,...,x_n)=\frac{1}{N(N-1)...(N-n+1)}$$

(ب) بيّن أن احتمال اختيار أي مجموعة جزئية من القياسات حجمها n دون مراعاة لترتيب السحب هو $\frac{1}{\binom{N}{n}}$.

(جـ) بيّن أن التوزيع الهامشي لأي زوج من المتغيرات العشوائية في (أ) (X_i, X_j)، $i \neq j$، هو: $g(x_i,x_j)=\frac{1}{N(N-1)}$.

(د) بيّن أن: $Cov(X_i,X_j)=-\frac{\sigma^2}{N-1}$

حيث $\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(c_i-\mu)^2$ تباين المجتمع و $\mu=\frac{\sum_{i=1}^{N}c_i}{N}$ متوسط المجتمع.

(هـ) بيّن أن $E(\overline{X})=\mu$ وأن $V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}\frac{N-n}{N-1}$.

٦- لدينا المجتمع من القياسات $\{1,2,3,4,5,6\}$، اكتب التوزيع الاحتمالي لـ $\overline{X}$ متوسط عينة حجمها 3 نسحبها عشوائيا من هذا المجتمع وارسم المدرج الاحتمالي لهذا التوزيع.

٧ - في التمرين السابق (٦) احسب متوسط المجتمع μ وتباينه σ^2. مستخدما توزيع $\overline{X}$ في التمرين السابق احسب $E(\overline{X})$ و $V(\overline{X})$ ثم تحقّق من صحة العلاقات التي استنتجتها في (هـ) من التمرين الخامس.

٨ - ليكن X متغيرا يتوزع وفق ذي الحدين $b(n\ ,p)$ عندئذ $M_X(t)=(q+pe^t)^n$. ليكن $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ حيث $\mu=np$ و $\sigma=\sqrt{npq}$. أكتب $M_Z(t)$ الدالــة المولــدة للعزوم للمتغير المعياري Z، خذ $\log M_Z(t)$ وانشره في كثيرة حدود، ثم بيّن أن $M_Z(t)$ يتقارب إلى دالة عزوم التوزيع الطبيعي المعياري عندما $n\to\infty$.

(**إرشاد**: نعلم أن $log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...$ حيث $|x|<1$.)

٩– يتوزع عدد حوادث المرور عند تقاطع طرق وفق توزيع بواسون بمتوسط 40 حادثة في السنة، ما هو احتمال وقوع 55 حادثة على الأكثر عند ذلك التقاطع في سنة معينة؟

١٠– أخذنا عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي $N(10, 400)$. ما هي أصغر قيمة ممكنة لِ n بحيث لا يزيد عن 0.025 احتمال أن يتجاوز الفرق بين متوسطي العينة والمجتمع المقدار 2؟

١١– ليكن X متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع الطبيعي $N(100,25)$. احسب $P(|\overline{X}-100|>1)$ إذا كان:

(أ) $\overline{X}$ متوسط عينة حجمها $n=25$،

(ب) $\overline{X}$ متوسط عينة حجمها $n=100$.

١٢– أوزان الأشخاص الذين يستخدمون مصعدا معينا تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي 150 ليبرة وانحراف معياري 20 ليبرة. وحمولة المصعد القصوى هي 650 ليبرة.

(أ) بصورة عشوائية يجتمع أربعة أشخاص في المصعد. ما هو احتمال تجاوز الحمولة القصوى؟

(ب) بصورة عشوائية يتواجد شخص واحد في المصعد ومعه أمتعة تزن ثلاثة أمثال وزنه. ما هو احتمال تجاوز الحمولة القصوى؟

١٣– يمكن لأكثر من طالب التعاون لإجراء هذه التجربة. نرمي حجر نرد متوازن خمس مرات متتالية ونسجل النتائج. نكرر هذه التجربة مائتي مرة ونسجل العينات المائتين الناتجة كل منها بحجم $N=5$ ومسحوبة من التوزيع المنتظم:

$$f(x)=\frac{1}{6}, \qquad x=1,2,3,4,5,6$$

نحسب $\overline{X}$ متوسط كل من العينات المائتين ونرسم لها مدرجا تكراريا. هل تجد أن مدرج التكرار قريب من شكل الجرس وهو شكل التوزيع الطبيعي؟

١٤- في طريقه إلى عمله يجتاز موظف ثلاث إشارات ضوئية. والإشارات تعمل مستقلة بعضها عن بعض، واحتمال أن يواجه إشارة حمراء هو 0.4، 0.8، 0.5 بالنسبة للإشارات الثلاث، على الترتيب.

(أ) ليكن Y عدد الإشارات الحمر التي يواجهها الموظف في رحلته اليومية إلى عمله. أوجد توزيع Y.

(ب) لنفرض أن الموظف يقوم بـ 250 رحلة في السنة إلى عمله وليكن $\overline{Y}$ متوسط عدد الإشارات الحمراء للرحلة الواحدة. احسب $E(\overline{Y})$، $V(\overline{Y})$، $P(\overline{Y} \geq 1.5)$.

١٥- تذبح مضافة عربية كل يوم 1، 2، 3، أو 4 خراف باحتمالات هي، على الترتيب 0.4، 0.3، 0.2 و 0.1. ما هو الحد الأدنى لعدد الخراف التي ستلبي باحتمال يساوي 0.99 حاجة المضافة من الذبائح لفترة 120 يوما؟ (نفترض أن حاجة المضافة في يوم مستقلة عن حاجتها في يوم آخر).

١٦- يتضمن امتحان خمسين سؤالا من النوع متعدد الاختيارات، ولكل سؤال ثلاثة أجوبة مقترحة، واحد منها، فقط، هو الجواب الصحيح، ولكي ينجح الطالب لابد له من الإجابة بصورة صحيحة على عشرين سؤالا على الأقل.

(أ) احسب احتمال نجاح طالب غير مؤهل يختار جوابه عن كل سؤال عشوائيا.

(ب) مع بقاء عدد الأسئلة ودرجة النجاح كما هي، كم يجب أن يكون عدد الاختيارات المطروحة أمام كل سؤال ليصبح احتمال نجاح طالب يختار أجوبته عشوائيا أقل من واحد في المائة؟

(جـ) في حال وجود اختيارين، فقط، كم يجب أن تكون درجة النجاح بحيث لايزيد احتمال نجاح طالب يختار جوابه عشوائيا على الواحد في المائة؟

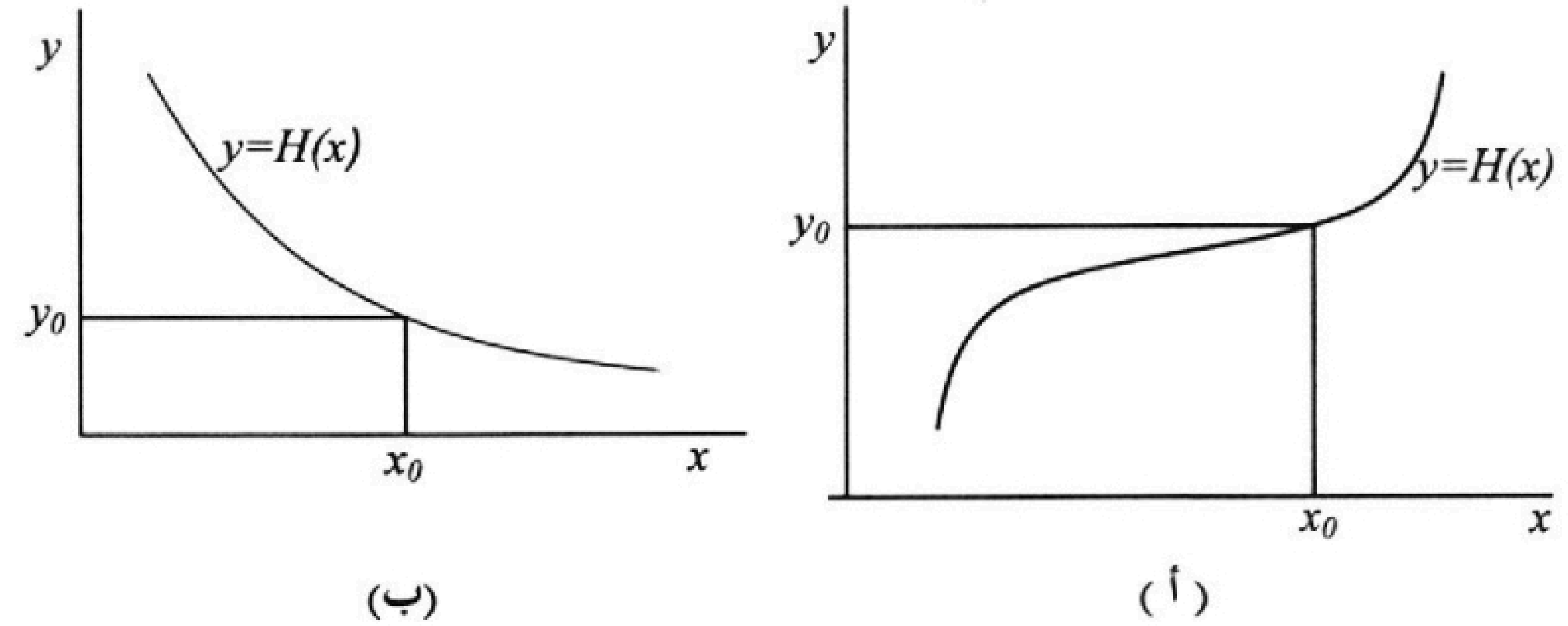
١٧– إذا كان 55% من الناخبين في مدينة كبيرة يؤيدون قضية فما احتمال أن تُظهر عينة عشوائية من مائة ناخب من هذه المدينة أغلبية لصالح القضية؟

الفصل الثالث

توزيعات العينات الصغيرة

(٣–١) توزيع دالة في متغير عشوائي

إذا كنا نعلم توزيع متغير عشوائي فكيف يمكن استنتاج التوزيع الموافق لمتغير عشوائي جديد تربطه بالمتغير الأول علاقة دالّية معينة؟ وهكذا إذا كان X المتغير العشوائي الأساسي ودالة كثافته $f(x)$ معروفة، فكثيرا ما يكون من الضروري إيجاد دالة كثافة المتغير $Y= H(X)$، حيث ترمز H لعلاقة دالّية بين Y و X. وعلى سبيل المثال، قد نعلم التوزيع الموافق للسرعة v لذرة غازية كتلتها m ونحتاج لمعرفة التوزيع الموافق للطاقة الحركية $\frac{1}{2}mv^2$. وسنفترض، توخيا للسهولة، أن الدالة $H(X)$ رتيبة، إما متزايدة أو متناقصة، فسيوافق كل قيمة لِـ X قيمة واحدة فقط لِـ Y والعكس. وسنعبر عن عكس العلاقة $Y= H(X)$ بالصيغة $X = H^{-1}(Y) = h(Y)$.



الشكل رقم (٣–١). الخط البياني لعلاقة تحويل متغير.

وفي حالة دالة متزايدة كما في الشكل رقم (٣-١أ) سيفترض المتغير Y قيمة أقل من $y_0 = H(x_0)$، مثلا، إذا وفقط إذا، افترض X قيمة أقل من x_0. وهذا يعني أن احتمال كون Y أصغر أو يساوي y_0 يساوي تماما احتمال كون X أصغر أو يساوي x_0، $P(Y \le y_0) = P(X \le x_0)$.

وإذا رمزنا بالرمز $g(y)$ لدالة الكثافة الموافقة للمتغير Y، فيمكن التعبير عن تساوي الاحتمالين بدلالة التكاملات على الشكل:

$$\int_{-\infty}^{y_0} g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x_0} f(t)\,dt \qquad (١)$$

وبما أن المساواة تبقى صحيحة بصرف النظر عن القيمتين y_0 و x_0 فيمكن كتابتها بشكل عام بالصورة التالية:

$$\int_{-\infty}^{y} g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{h(y)} f(t)\,dt \qquad (٢)$$

وبالاستفادة من قاعدة معروفة جيدا في حساب التفاضل والتكامل تقول إنه إذا كان:

$$F(x) = \int_{c}^{u(x)} f(t)\,dt$$

حيث c عدد ثابت و u دالة في x، فعندئذ:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(u)\frac{du}{dx}$$

وإذا اشتققنا بالنسبة لِ y طرفي العلاقة (٢) نجد وفقا لهذه القاعدة:

$$g(y) = f[h(y)]\frac{d}{dy}h(y) \qquad (٣)$$

وهذه العلاقة تعطي دالة كثافة المتغير Y عندما تكون $H(X)$ وبالتالي $h(y)$ دالة متزايدة. وفي حالة دالة $H(X)$ متناقصة [انظر الشكل رقم (٣-١ب)] سيفترض المتغير Y قيمة أقل

من $y_0 = H(x_0)$، مـــــثلا ، إذا وفقــــط إذا ، افـترض X قيمــة أكـــبر من x_0، أي $P(Y \le y_0) = P(X \ge x_0) = 1 - P(X \le x_0)$،

أو :

$$\int_{-\infty}^{y} g(t)\, dt = 1 - \int_{-\infty}^{h(y)} f(t)\, dt$$

وبالتالي :

$$g(y) = -f[h(y)]\frac{d}{dy}h(y) \qquad (٤)$$

ونلاحـظ أن $\frac{d}{dy}h(y) = h'(y)$ موجبـة في (٣) وسـالبة في (٤) وبالتـالي $h'(y)$ في (٣) تساوي $-h'(y)$ في (٤) ويمكن التعبير عن(٣) و (٤) بالصيغة الموحّدة :

$$g(y) = f[h(y)]\,|h'(y)|$$

وهكذا فإن القاعدة التالية تبقى صحيحة سواء أكانت الدالـة $Y = H(X)$ متزايـدة أم متناقصة :

قاعدة تحويل المتغير

إذا كانت الدالـة $y = H(x)$ متزايـدة دومـا أو متناقصـة دومـا في x وكانـت $f(x)$ دالـة كثافة المتغير العشوائي X، فإن دالة كثافة المتغير العشوائي Y معطاة بالعلاقة :

$$g(y) = f[h(y)]\,|h'(y)| \qquad (٥)$$

حيث $x = h(y)$ هي الدالة المعاكسة للدالة $y = H(x)$.

وللمساعدة في تـذكّر القاعـدة (٥) نكتبهـا فيمـا يلـي بشـكل مكـافئ بعـد ضـرب الطرفين بِـ $|dy|$ ثم إعادة التعبير عن الطرف الأيمن بدلالة x :

$$g(y)|dy| = f[h(y)]\,|h'(y)||dy| = f(x)\,|h'(y)\,dy| = f(x)\,|dx|$$

أو :

$$g(y)\,|\,dy\,| = f(x)\,|\,dx\,|$$

مثال (١)

كتوضيح لنفترض أن دالة كثافة المتغير X هي:

$$f(x) = e^{-x}, x \geq 0$$

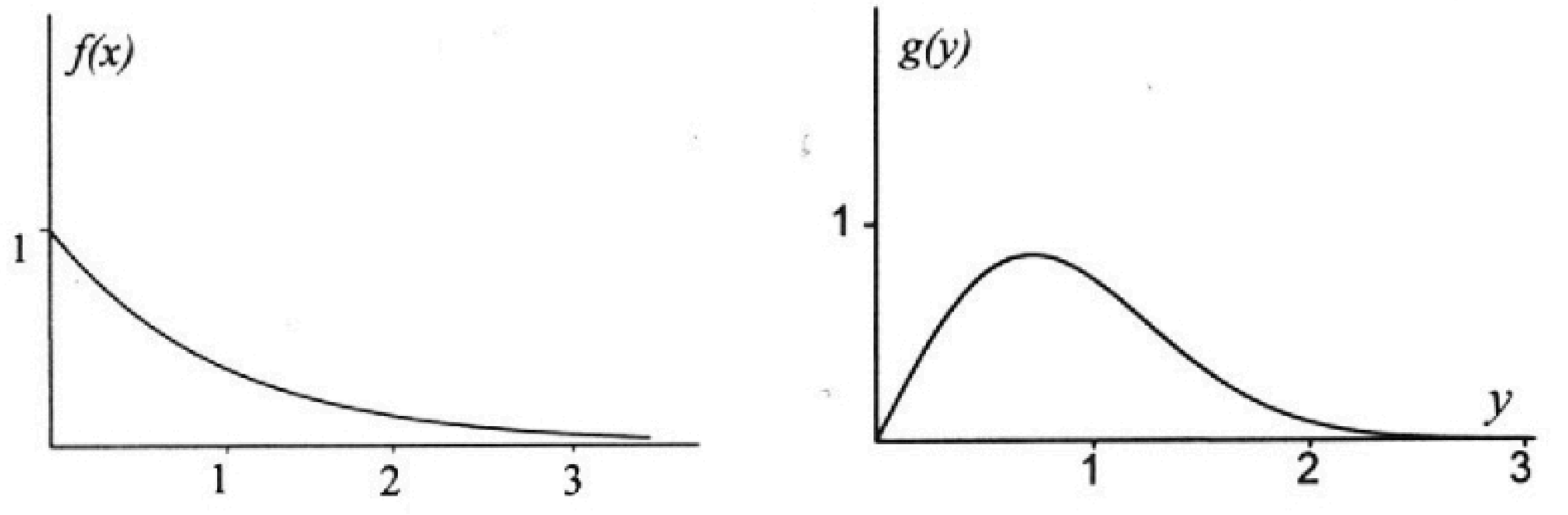
وأننا نرغب في معرفة دالة كثافة المتغير $Y=\sqrt{X}$ ، وبما أن $y=\sqrt{x}$ دالة متزايدة في X فيمكن تطبيق العلاقة (٥). ولدينا هنا $h(y) = y^2$ لأن الدالة المعاكسة لـ $y=\sqrt{x}$ هي $x = y^2$، ومنه $h'(y)=2y$ والعلاقة (٥) تصبح:

$$g(y) = e^{-y^2}|2y|$$

وبما أن y تأخذ قيما غير سالبة، فقط، فإن $2y = |2y|$. ودالة الكثافة المطلوبة هي:

$$g(y)=2ye^{-y^2}, \ y\geq 0$$

ويبيّن الشكل رقم (٣-٢) كلا من دالتي الكثافة.



الشكل رقم (٣-٢). توزيعا x و $y=x^{\frac{1}{2}}$ في حالة $f(x) = e^{-x}$، $x \geq 0$.

مثال (٢)

وكتوضيح آخر، لنأخذ المسألة المقترحة في مطلع هذه الفقرة وهي إيجاد دالة كثافة الطاقة الحركية $E =\frac{mv^2}{2}$ بدءا من دالة كثافة السرعة v لذرة غازية كتلتها m المعرف بالعلاقة:

$$f(v) = av^2 e^{-bv^2}$$

حيث a، b ثابتان تتوقف قيمتاهما على نوع الغاز. والعلاقة (٥) قابلة للتطبيق باعتبار أن الدالة $E=\frac{mv^2}{2}$ دالة متزايدة. وإذا اعتبرنا $v = x$ و $E = y$ ، وعندئذ $h(E)=\sqrt{2E/m}$ ، و $h'(E)=\frac{1}{\sqrt{2mE}}$ فنجد وفقا للعلاقة (٥) أن:

$$g(E)=a\ \frac{2E}{m}e^{-b\left(\frac{2E}{m}\right)}.\frac{1}{\sqrt{2mE}}=\alpha E^{\frac{1}{2}}e^{-\beta E}$$

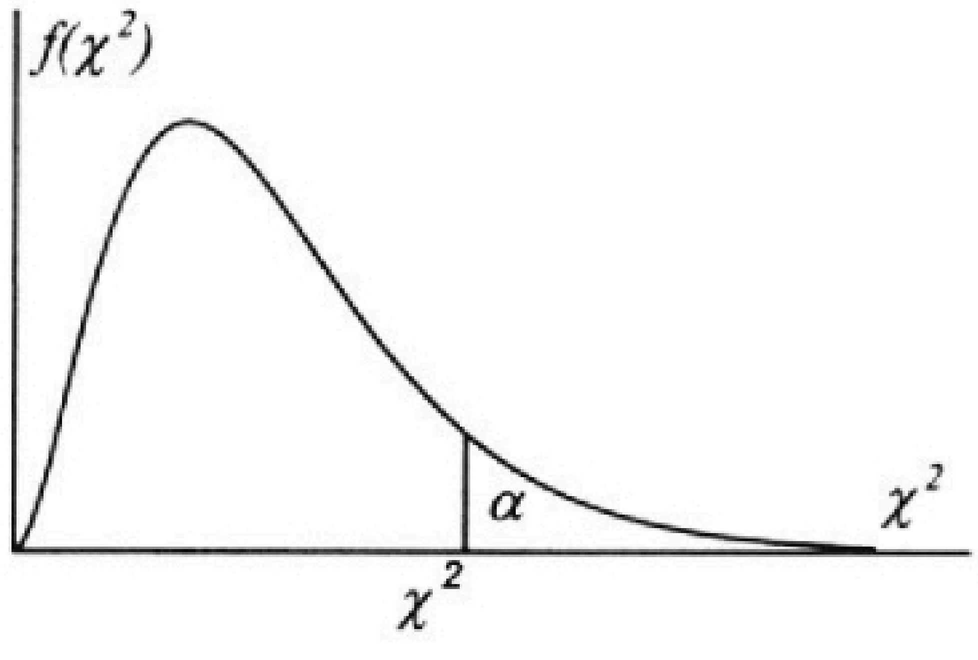
حيث $\alpha=\frac{a\sqrt{2}}{m^{3/2}}$ و $\beta=\frac{2b}{m}$ ثابتان تتوقف قيمتاهما على قيم a، b و m.

(٣-٢) توزيع مربع كاي

إحدى دوال الكثافة المستخدمة على نطاق واسع في الإحصاء هو دالة الكثافة المعرفة بالعلاقة:

$$f(\chi^2)=\frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}(\chi^2)^{\frac{1}{2}\nu-1}e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \qquad (٦)$$

وتسمى دالة كثافة التوزيع χ^2 بـ ν درجة من الحرية [الشكل رقم (٣-٣)].



الشكل رقم (٣-٣). توزيع مربع كاي.

ومن الواضح أنه معرف من أجل $\chi^2 > 0$ وأن تكامله من 0 إلى ∞ يساوي الواحد باعتبار أن:

$$\int_0^\infty(\chi^2)^{\frac{1}{2}\nu-1}e^{-\frac{1}{2}\chi^2}d(\chi^2)=2^{\nu/2}.\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)$$

ولحساب دالة عزوم χ^2 نستبدل الرمز χ^2 بـ Z للسهولة ونكتب وفقا لتعريف دالة العزوم:

$$M_Z(t)=\frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_0^\infty e^{tz}\, z^{\frac{1}{2}\nu-1}\, e^{-\frac{1}{2}z}\, dz$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}\nu}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}z(1-2t)}\, z^{\frac{1}{2}\nu-1}\, dz$$

ليكن $y = z(1 - 2t)/2$ ، فعندئذ $dz = 2dy/\ (1 - 2t)$ و :

$$M_Z(t)=\frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-y}\left(\frac{2y}{1-2t}\right)^{\frac{1}{2}\nu-1}\frac{2}{1-2t}dy$$

$$=\frac{(1-2t)^{-\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-y}\, y^{\frac{1}{2}\nu-1}\, dy=(1-2t)^{-\frac{1}{2}\nu}$$

وهكذا نجد أن دالة عزوم χ^2 هي:

$$M_{\chi^2}(t)=(1-2t)^{-\frac{1}{2}\nu} \quad , \quad t<\frac{1}{2} \qquad (٧)$$

ولحساب العزمين μ و μ_2' نحسب $M'(0)$ و $M''(0)$ على الترتيب فنجد:

$$\mu=\nu \quad , \quad \mu_2' = \nu(\nu+2) \qquad (٨)$$

ومنه يكون التباين:

$$\mu_2=\mu_2' - \mu^2=\nu(\nu+2)-\nu^2=2\nu \qquad (٩)$$

ويتصف التوزيع χ^2 بخاصة مفيدة تسمى **الخاصة التجميعية**، وهي أن مجموع متغيرين مستقلين أو أكثر يتوزع كل منها وفق التوزيع χ^2 يتبع بدوره التوزيع χ^2. وسنعرض هذه الخاصة بالتفصيل الآن:

ليكن χ_1^2 و χ_2^2 متغيرين مستقلين يتوزعان وفق التوزيع χ^2 بـ v_1 و v_2 درجة من الحرية ، على الترتيب. ولنأخذ المتغير $w=\chi_1^2+\chi_2^2$ ، فيمكن استنادا إلى خواص دوال العزوم كتابة :

$$\begin{aligned} M_w(t) &= M_{\chi_1^2}(t).M_{\chi_2^2}(t) \\ &= (1-2t)^{-\frac{1}{2}v_1}(1-2t)^{-\frac{1}{2}v_2} \\ &= (1-2t)^{-\frac{1}{2}(v_1+v_2)} \end{aligned} \qquad (١٠)$$

ولكن هذه العبارة هي نفس شكل دالة عزوم χ^2 بـ (v_1+v_2) درجة من الحرية ، ومنه نستنتج النظرية التالية :

نظرية (١)

إذا كان المتغيران χ_1^2 و χ_2^2 مستقلين ويتوزع كل منهما وفق التوزيع χ^2 بـ v_1 وv_2 درجة من الحرية ، على الترتيب ، فإن المجموع $\chi_1^2+\chi_2^2$ يتبع بدوره التوزيع χ^2 بـ v_1+v_2 درجة من الحرية.

ويمكن تعميم هذه القاعدة إلى أي عدد محدود، k ، من المتغيرات χ^2 المستقلة فيما بينها فنقول إنه إذا كانت χ_1^2 ، . . . ، χ_k^2 متغيرات مستقلة بعدد من درجات الحرية $v_1,\ldots,v_k$ ، على الترتيب ، فان $\sum_{i=1}^{k}\chi_i^2$ يتوزع وفق χ^2 بعدد من درجات الحرية يساوي $v_1+\ldots+v_k$.

(٣-٣) توزيع مجموع مربعات

لتكن X_1، ...، X_n عينة حجمها n من توزيع طبيعي متوسطه الصفر وتباينه 1. والمطلوب إيجاد دالة كثافة W حيث :

$$W=\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \qquad (١١)$$

وبما أن المتغيرات X_1، ...، X_n مستقلة فيما بينها فيمكن كتابة دالة عزوم W بدلالة دوال العزوم الموافقة للمتغيرات X_i على الشكل:

$$M_W(t) = M_{\Sigma X_i^2}(t) = M_{X_1^2}(t) \,.\, M_{X_2^2}(t) \ldots M_{X_n^2}(t) = \left[M_{X^2}(t)\right]^n \qquad (١٢)$$

باعتبار أن لكل من المتغيرات X_i التوزيع نفسه، وبالتالي دالة العزوم نفسها، ولحساب دالة العزوم $M_{X^2}(t)$ نكتب وفقا للتعريف:

$$M_{X^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx^2} . e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2(1-2t)} dx$$

لتكن $y = x\sqrt{1-2t}$ ؛ فعندئذ نجد:

$$M_{X^2}(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$= (1-2t)^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad t < \frac{1}{2}$$

ومن هذه النتيجة والعلاقة (١٢) نكتب:

$$M_W(t) = (1-2t)^{-\frac{n}{2}} \qquad (١٣)$$

وبمقارنة (١٣) مع (٧) نجد أن هذه الدالة هي دالة العزوم للمتغير χ^2 بعدد n درجة من الحرية، واستنادا إلى نظرية الوحدانية المذكورة في الفقرة (١-٨) نستنتج النظرية التالية:

نظرية (٢)

إذا كانت X_1، ...، X_n عينة من توزيع طبيعي متوسطه الصفر وتباينه الواحد. فإن توزيع المتغير $W = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ هو التوزيع χ^2 بـ n درجة من الحرية.

(٣-٤) توزيع تباين العينة S^2.

لتكن X_1، ...، X_n عينة من توزيع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 فسنستخدم نتائج الفقرة السابقة لحساب توزيع المتغير:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \qquad (١٤)$$

وبالعودة إلى (١٢) من الفصل الثاني يمكن كتابة:

$$(n-1)\,S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - n(\overline{X} - \mu)^2 \qquad (١٥)$$

ونظرا لسهولة العمل بوحدات قياس معيارية فسنضرب طرفي العلاقة الأخيرة بـ $\frac{1}{\sigma^2}$ لنجد:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} + \left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \qquad (١٦)$$

أو بصورة رمزية:

$$J + K = L \qquad (١٧)$$

حيث: $J=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ ، $K=\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2$ و $L=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2$

وبالعودة إلى (٧١) من الفصل الأول نعلم أن الشرط اللازم والكافي لاستقلال متغيرين طبيعيين هو أن يكون معامل ارتباطهما صفرا، أو أن يكون تغايرهما صفرا.

وبما أن كلا من $\overline{X}$ و $(X_i - \overline{X})$ يتوزع وفق التوزيع الطبيعي فيكفي لبيان استقلالهما إثبات أن $Cov[(X_i - \overline{X}),\overline{X}]=0$.

لنرمز الآن بالرمز T_i للفرق $(X_i-\mu)$ فعندئذ يكون $\overline{T}=\overline{X}-\mu$ و $X_i - \overline{X}=T_i-\overline{T}$ وبالتالي يمكننا كتابة:

$$Cov[(X_i - \overline{X}),\overline{X}]= Cov[(X_i - \overline{X}),(\overline{X} - \mu)]= Cov[(T_i - \overline{T}),\overline{T}]$$

$$= E[(T_i - \overline{T})\overline{T}]= E(T_i\overline{T}) - E(\overline{T}^2)= E(T_i\overline{T})-V(\overline{T}) = E[(T_i\overline{T})- \frac{\sigma^2}{n}$$

وإذا تذكّرنا أن المشاهدات X_1 ، ... ، X_n وبالتالي المقادير T_1 ، ... ، T_n مستقلة فيما بينها ، وأن $E(T_i) = 0$ ، $i = 1,..., n$ ، و $E(T_iT_j) = E(T_i)E(T_j)$ ، $i \neq j$ ، فنجد :

$$E(T_i\overline{T}) = E\left[T_i\frac{T_1+...+T_i+...+T_n}{n}\right] = E\frac{T_i^2}{n} = \frac{1}{n}ET_i^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

وهكذا يكون

$$cov[(X_i - \overline{X}), \overline{X}] = \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} = 0$$

مما يعني بدوره أن كلا من الانحرافات $X_i - \overline{X}$ ، $i=1,...,n$ ، مستقل عن $\overline{X}$ ، وبالتالي فإن $(n-1)S^2 = \sum_1^n (X_i - \overline{X})^2$ مستقل عن $\overline{X}$. أي أن الكميتين J و K في (١٧) مستقلتان ، وأن دالة عزوم المجموع $J + K$ تساوي إلى جداء دالة عزوم J بدالة عزوم K مما يسمح لنا بكتابة :

$$M_L(t) = M_{J+K}(t) = M_J(t).\ M_K(t) \qquad (١٨)$$

أو :

$$M_J(t) = \frac{M_L(t)}{M_K(t)}$$

وتنطبق نتائج الفقرة السابقة على كل من L وK ، ولذلك نجد :

$$M_{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}(t) = \frac{(1-2t)^{-\frac{n}{2}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}} = (1-2t)^{-\frac{n-1}{2}} \qquad (١٩)$$

وهكذا نكون قد برهنا النظرية التالية :

نظرية (٣)

إذا كانت X_1 ، ... ، X_n عينة من توزيع طبيعي تباينه σ^2 فإن المتغير $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma}\right)^2$ يتبع التوزيع χ^2 بـ $(n-1)$ درجة من الحرية.

ويمكن الآن أن نوضح السبب الذي نطلق من أجله تعبير "درجات الحرية" على المعلمة ν التي تظهر في عبارة التوزيع χ^2. فالواقع أن ν يمثل عدد المتغيرات المستقلة التي

يشكل مجموع مربعاتها المتغير χ^2. وهكذا نجد في (١١) أن $v = n$ لأن المتغيرات الـ n التي جمعنا مربعاتها لتشكيل المتغير χ^2 كانت مستقلة فيما بينها، بينما المتغيرات التي جمعنا مربعاتها في عبارة S^2 تحوي $(n - 1)$ فقط من المتغيرات المستقلة، باعتبار أن مجموع هذه المتغيرات يساوي الصفر $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})=0$ ، مما أدى إلى أن تكون $v = n - 1$.

(٣–٥) التوزيع t أوتوزيع ستيودنت

ليكن U متغيرا طبيعيا متوسطه الصفر وتباينه الواحد. ولنفرض أن المتغير Z^2 يتبع التوزيع χ^2 بـ v درجة من الحرية. لنفرض أن U وZ مستقلان بعضهما عن بعض، ولنعرّف المتغير T على الشكل:

$$T=\frac{U}{\sqrt{\frac{\chi^2(v)}{v}}}=\frac{U\sqrt{v}}{Z} \qquad (٢٠)$$

والمطلوب إيجاد دالة كثافة المتغير T.

ولهذه الغاية لابد من معرفة توزيع المتغير Z حيث $Z \geq 0$ دوما. ويمكن الحصول على توزيع Z من عبارة التوزيع χ^2 بالاستفادة من علاقة تحويل المتغير $Z=\sqrt{\chi^2}$ أو $Z^2 = \chi^2$ وتطبيق العلاقة (٥). ويوافق χ^2 هنا المتغير X في (٥) كما يوافق Z المتغير Y، و $h(z) = z^2$، وهكذا نجد:

$$g(z) = f(z^2).\ 2z$$

حيث $f(z^2)$ هي عبارة التوزيع χ^2 المذكورة في (٦) بعد وضع z^2 بدلا من χ^2، أي أن:

$$g(z)=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}v-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}v\right)}z^{v-1}e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad (٢١)$$

وهي عبارة التوزيع χ^2 بـ v درجة من الحرية.

وبما أن U وZ مستقلان فإن دالة الكثافة المشتركة هي جداء دالتي الكثافة الهامشيتين أي :

$$f(u,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}\cdot\frac{1}{2^{\frac{1}{2}v-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}v\right)}z^{v-1}e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad (٢٢)$$

وإذا رمزنا للأعداد الثابتة بـ c_1 تصبح العبارة في (٢٢) على الشكل :

$$f(u,z)=c_1 z^{v-1}e^{-\frac{(u^2+z^2)}{2}}$$

حيث $c_1^{-1}=2^{\frac{1}{2}(v-1)}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}v\right)$ ، إذا تركنا Z ثابتا وحولنا المتغير U إلى المتغير T وفق العلاقة $t=\frac{u\sqrt{v}}{z}$ فسنحصل على التوزيع المشترك للمتغيرين T وZ، بالاستفادة من العلاقة (٥)، على الشكل :

$$g(t,z)=c_2 z^v e^{-\frac{1}{2}z^2(1+\frac{t^2}{v})}\ ;-\infty<t<+\infty\ z\geq 0$$

حيث $c_2=\frac{c_1}{\sqrt{v}}$ ، ويمكننا الحصول على دالة كثافة t بمكاملة دالة الكثافة المشتركة $g(t,z)$ فوق المتغير z. وهكذا تكون دالة الكثافة المطلوبة هي :

$$K(t)=c_2\int_0^\infty z^v e^{-\frac{1}{2}z^2\left(1+\frac{t^2}{v}\right)}dz$$

وإذا فرضنا الآن أن $y=\frac{z^2}{2}\left(1+\frac{t^2}{v}\right)$ وبالتالي $dz=dy/\sqrt{2y}\sqrt{1+t^2/v}$ فيمكننا كتابة :

$$K(t)=c_2\int_0^\infty\left[2y\Big/\left(1+\frac{t^2}{v}\right)\right]^{v/2}\ e^{-y}\cdot\frac{dy}{\sqrt{2y}\sqrt{1+t^2/v}}$$

$$=c_3\left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{1}{2}(v+1)}\int_0^\infty y^{\frac{1}{2}(v-1)}\ e^{-y}\,dy$$

حيث $c_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\nu\right)}$ ، $c_3 = 2^{\frac{1}{2}(\nu-1)} c_2$ ،

ومنه :

$$K(t) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\nu\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)}$$

وما سبق يسمح لنا بكتابة النظرية التالية :

نظرية (٤)

إذا كان U متغيرا طبيعيا معياريا وكان المتغير Z^2 يتبع التوزيع χ^2 بـ ν درجة من الحرية وبصورة مستقلة عن U. فعندئذ يتوزع المتغير $T = \dfrac{U\sqrt{\nu}}{Z} = U \Big/ \sqrt{\dfrac{\chi^2(\nu)}{\nu}}$ وفق توزيع دالة كثافته :

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\nu\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)} \qquad (٢٣)$$

ويسمى التوزيع t أو توزيع "ستيودنت" بـ ν درجة من الحرية.

ولهذه النظرية تطبيق مهم جدا في مجال العينات الإحصائية. لنفرض أن X_1، . . . ، X_n عينة عشوائية من توزيع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 ، فقد رأينا أن $U = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ يتوزع وفق التوزيع الطبيعي المعياري، وأن $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ يتوزع، وبصورة مستقلة عن $\overline{X}$ ، وفق التوزيع χ^2 بعدد من درجات الحرية ν يساوي $n-1$ ، أي أن $\dfrac{S^2}{\sigma^2} = \dfrac{\chi^2(n-1)}{n-1}$ ، ووفقا للنظرية السابقة يتوزع المتغير:

$$T = U \Big/ \sqrt{\frac{\chi^2(n-1)}{n-1}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma} \Big/ \sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\times\frac{\sigma}{S} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}, \qquad (٢٤)$$

وفق التوزيع t بعدد من درجات الحرية v يساوي $n - 1$. وهكذا نكتب النتيجة التالية :

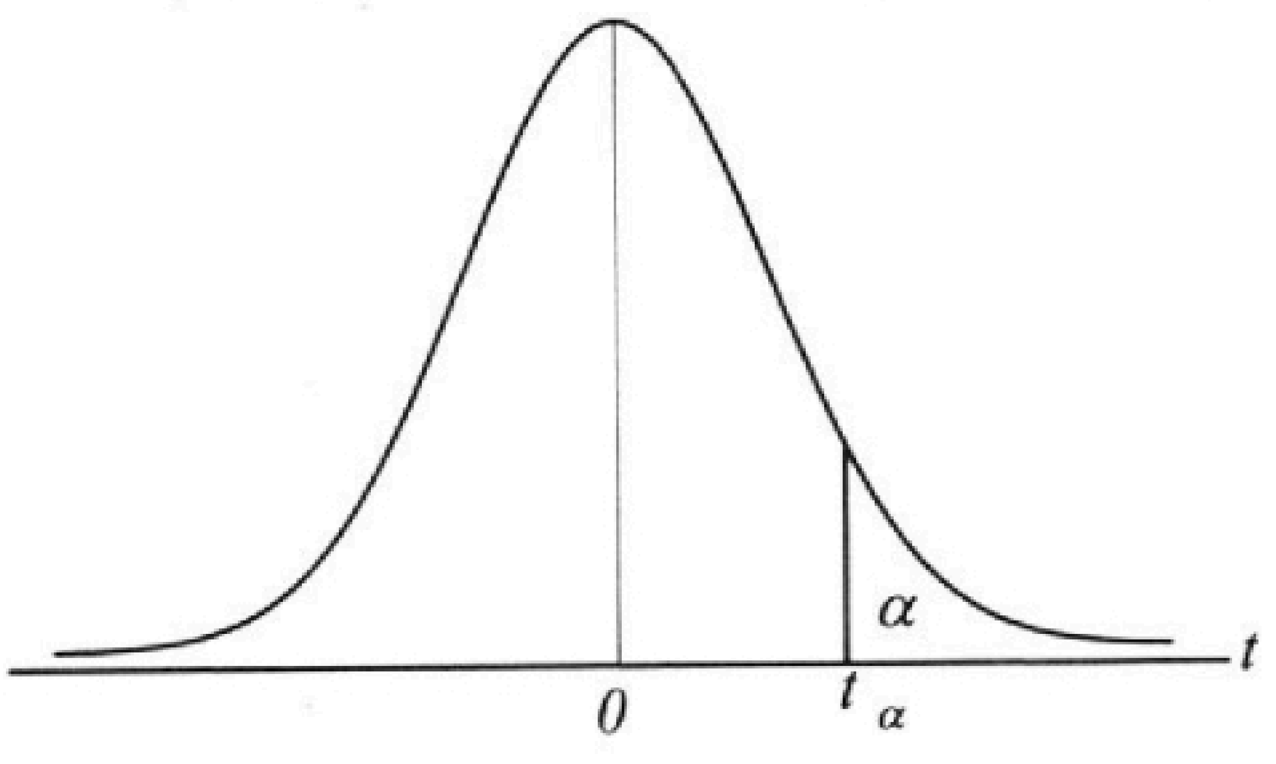
نتيجة (١)

لتكن X_1 ، . . . ، X_n عينة عشوائية حجمها n من توزيع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$.

وليكن $\bar{X}$ و $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(X_i - \bar{X})^2$ متوسط وتباين العينة، على الترتيب، فعندئذ يكون توزيع المتغير:

$$T = \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{S}$$

هو التوزيع t بعدد من درجات الحرية يساوي n-1 [الشكل رقم (٣-٤)].



الشكل رقم (٣-٤). توزيع ستيودنت أو التوزيع t.

وإذا افترضنا الآن عينتين مستقلتين X_1 ، ... ، X_{n_1} و Y_1 ، ... ، Y_{n_2} ، الأولى من توزيع طبيعي متوسطه μ_1 وتباينه σ^2 والثانية من توزيع طبيعي متوسطه μ_2 وله التباين نفسه σ^2. ولنرمز لتبايني العينتين، على الترتيب، بالرمزين S_1^2 و S_2^2. فعندئذ سيكون توزيع المتغير:

$$U = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{(\bar{X}-\bar{Y})}} = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{\sqrt{n_1 n_2}\,[(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)]}{\sigma\sqrt{n_1 + n_2}}$$

هو التوزيع الطبيعي المعياري، كما رأينا في (١٨) من الفصل الثاني.

وبالإضافة إلى ذلك إذا اعتمدنا المقدار $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-1}$ كتقدير من العينتين معا للتباين المشترك σ^2 فإن توزيع المتغير:

$$Z^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} = (n_1+n_2-2)\frac{S_p^2}{\sigma^2}$$

هو التوزيع χ^2 بعدد من درجات الحرية v يساوي n_1+n_2-2، و ذلك وفقا للنظرية (١).

واستنادا إلى النظرية (٤) السابقة يتوزع المتغير:

$$T=\frac{U\sqrt{v}}{Z}=\frac{[(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)]\sqrt{n_1 n_2}}{\sigma\sqrt{n_1+n_2}}\times\frac{\sigma\sqrt{n_1+n_2-2}}{S_p\sqrt{n_1+n_2-2}}$$

$$=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_p}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}} \qquad (٢٥)$$

وفق التوزيع t بعدد من درجات الحرية يساوي n_1+n_2-2.

(٣-٦) التوزيع F

ليكن U وZ متغيرين مستقلين يتوزع كل منهما وفق التوزيع χ^2 بـ v_1 و v_2 درجة من الحرية على الترتيب. فما هو توزيع النسبة U/Z. إن دالة الكثافة المشتركة لِ U وZ هي جداء دالتي الكثافة الهامشيتين باعتبار أن U وZ مستقلان ومن (٦) يمكننا إذن كتابة:

$$f(u,z) = g(u).\ h(z)$$

$$=c_1 u^{\frac{1}{2}(v_1-2)} e^{-\frac{1}{2}u} . c_2 z^{\frac{1}{2}(v_2-2)} e^{-\frac{1}{2}z}$$

$$=c u^{\frac{1}{2}(v_1-2)} z^{\frac{1}{2}(v_2-2)} e^{-\frac{1}{2}(u+z)},\ u\geq 0, z\geq 0$$

حيث $c_1 = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}v_1}\Gamma\left(\frac{1}{2}v_1\right)}$، $c_2 = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}v_2}\Gamma\left(\frac{1}{2}v_2\right)}$، $c = c_1\ c_2$

إذا تركنا Z ثابتة وحولنا المتغير U إلى W وفق علاقة التحويل $W=\frac{U}{Z}$ أي

$$U = Z\,W$$

وبتطبيـــق العلاقـــة (٥) نجـــد أن دالـــة الكثافـــة المشـــتركة لـــ Z وW ولـــتكن $g(z, w)$ هي :

$$\begin{aligned} g(z, w) &= f(u, z).\, z \\ &= c u^{\frac{1}{2}(v_1-2)} z^{\frac{1}{2}v_2} e^{-\frac{1}{2}(u+z)} \\ &= c w^{\frac{1}{2}(v_1-2)} z^{\frac{1}{2}(v_1+v_2-2)} e^{-\frac{1}{2}z(1+w)}, \quad z \geq 0, w \geq 0 \end{aligned}$$

ولكي نحصل على دالة كثافة W لابد من مكاملة الدالة $g(z, w)$ فوق المتغير Z.
وإذا رمزنا لدالة كثافة W بـ $K(w)$ نجد :

$$K(w) = \int_0^\infty g(z, w)\, dz = c w^{\frac{1}{2}(v_1-2)} \int_0^\infty z^{\frac{1}{2}(v_1+v_2-2)} e^{-\frac{1}{2}z(1+w)} dz$$

ليكن $y = z(1 + w)/2$ ، فعندئذ $dz = 2\, dy / (1 + w)$ و :

$$K(w) = a\, w^{\frac{1}{2}(v_1-2)} \int_0^\infty [2y / (1+w)]^{\frac{1}{2}(v_1+v_2-2)} e^{-y} \frac{2dy}{1+w}$$

$$= \frac{a w^{\frac{1}{2}(v_1-2)}}{(1+w)^{\frac{1}{2}(v_1+v_2)}} \int_0^\infty y^{\frac{1}{2}(v_1+v_2-2)} e^{-y} dy$$

$$= a \Gamma\left[\frac{1}{2}(v_1 + v_2)\right] . \frac{w^{\frac{1}{2}(v_1-2)}}{(1+w)^{\frac{1}{2}(v_1+v_2)}} \tag{٢٦}$$

حيث $c = \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}v_1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}v_2\right)}$ و $a = 2^{\frac{1}{2}(v_1+v_2)}$.

ومـن المناسـب في كـثير مـن التطبيقـات العمليـة اسـتخدام النسـبة F بـدلا مـن W حيث :

$$F = \frac{U/v_1}{Z/v_2} = \frac{v_2}{v_1}\frac{U}{Z} = \frac{v_2}{v_1} W \tag{٢٧}$$

وإذا قمنا بهذا التحويل في المتغير في (٢٦) نجد:

$$f(F)=K\left(\frac{v_1}{v_2}F\right).\frac{v_1}{v_2}$$

$$=\frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(v_1+v_2)\right].v_1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}v_1\right)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}v_2\right).v_2}\left(\frac{v_1}{v_2}F\right)^{\frac{1}{2}(v_1-2)}\left(1+\frac{v_1}{v_2}F\right)^{-\frac{1}{2}(v_1+v_2)}$$

وهكذا نصل إلى النظرية التالية:

نظرية (٥)

إذا كان كل من المتغيرين U وZ يتوزع وفق التوزيع χ^2 بـ v_1 وv_2 درجة من الحرية، على الترتيب، وكانا مستقلين، بعضهما عن بعض، فإن النسبة:

$$F=\frac{U/v_1}{Z/v_2}$$

تتوزع وفق دالة الكثافة:

$$f(F)=\frac{v_1.\Gamma\left[\frac{1}{2}(v_1+v_2)\right]}{v_2.\,\Gamma\left(\frac{1}{2}v_1\right)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}v_2\right).}\left(\frac{v_1}{v_2}F\right)^{\frac{1}{2}(v_1-2)}\left(1+\frac{v_1}{v_2}F\right)^{-\frac{1}{2}(v_1+v_2)} \qquad (٢٨)$$

ويسمى هذا التوزيع بالتوزيع F بـ v_1 وv_2 درجة من الحرية ونرمز له بـ $F(v_1, v_2)$.

ومن الملاحظ أن v_1 وv_2 تلعبان دورا متناظرا في عبارة دالة الكثافة $f(F)$ [الشكل رقم (٣-٥)]، أي أنه يمكن استنتاج دالة كثافة النسبة $F'=\frac{1}{F}=\frac{Z/v_2}{U/v_1}$ وذلك بأن نضع F' بدلا من F في (٢٨) وأن يأخذ v_1 وv_2 كل منهما مكان الآخر. (انظر التمرين ١٢).

وتلعب النظرية السابقة دورا بارزا في تطبيقات الإحصاء. إذ لو فرضنا أن X_1، ...، X_{n_1} وY_1، ...، Y_{n_2} عينتان مستقلتان حجماهما n_1 وn_2 على الترتيب، الأولى من

توزيع طبيعي متوسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 ، والثانية من توزيع طبيعي متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 ، فعندئذ يكون $(n_1-1)S_1^2/\sigma_1^2$ و $(n_2-1)S_2^2/\sigma_2^2$ مستقلين، بعضهما عن بعض، ويتوزع كل منهما وفق التوزيع χ^2 الأول بـ $(n_1\text{-}1)$ درجة من الحرية، والثاني بـ $(n_2\text{-}1)$ درجة من الحرية. وتمتلك عندئذ النسبتان $\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}$ و $\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}$ نفس خواص النسبتين $\frac{U}{v_1}$ و $\frac{Z}{v_2}$ المذكورتين في النظرية السابقة. وتحت الفرض بأن $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ يمتلك الإحصاء:

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$$

التوزيع F بـ $(n_1\text{-}1)$ و $(n_2\text{-}1)$ درجة من الحرية.

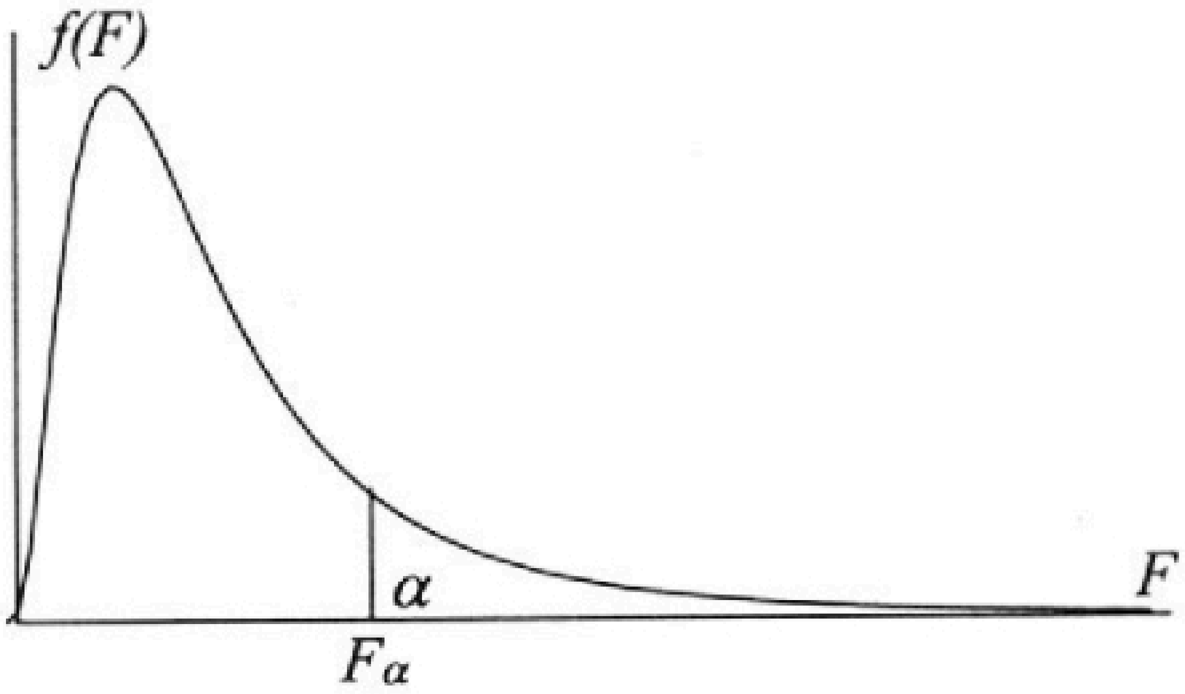
ونلخص ذلك في النظرية التالية:

نظرية (٦)

لتكن $X_1, \dots, X_{n_1}$ و $Y_1, \dots, Y_{n_2}$ عينتين مستقلتين، الأولى من توزيع طبيعي متوسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 والثانية من توزيع طبيعي متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 ، ولنرمز بـ S_1^2 و S_2^2 لتبايني العينتين، على الترتيب، فعندئذ تتوزع النسبة:

$$F=\frac{S_1^2\,\sigma_2^2}{\sigma_1^2\,S_2^2}$$

وفق التوزيع F بـ n_1- 1 و n_2- 1 درجة من الحرية.



الشكل رقم (٣–٥). التوزيع F .

(٣ – ٧) تمـــــارين

١– لتكن دالة الكثافة $f(x) = e^{-x}, x \geq 0$، أوجد بطريقة تحويل المتغير دالة الكثافة للمتغير **(أ)** $Y=\frac{1}{X}$ و **(ب)** $Y = log_e X$.

٢– لتكن دالة الكثافة $f(x)=xe^{-\frac{1}{2}x^2}\ ,\ x\geq 0$ ، أوجد دالة كثافة المتغير **(أ)** $Y=X+1$ ، **(ب)** $Y = X^2$ و **(جـ)** $Y = log_e X$.

٣– لتكن دالة الكثافة $f(x) = e^{-x}, x \geq 0$، أوجد بطريقة دوال العزوم دالة كثافة المتغير $Z=2n\overline{X}$ ، حيث $\overline{X}$ متوسط عينة عشوائية حجمها n من التوزيع $f(x)$.

٤– لتكن دالة الكثافة المشتركة $f(x,y) = e^{-(x+y)}$، $x \geq 0$ ، $y \geq 0$. أوجد دالة الكثافة للمتغير:

(أ) $Z = X + Y$ و **(ب)** $Z = e^{-(X+Y)}$.

٥– لتكن دالة الكثافة المشتركة $0 \leq y \leq 1$ ، $0 \leq x \leq 1$ ، $f(x, y) = 1$، أوجد دالة الكثافة للمتغير:

(أ) $Z = X^2$ ، **(ب)** $Z = X + Y$ و **(جـ)** $Z = Y / X$.

٦– بيّن أنه من أجل عينة حجمها n من مجتمع طبيعي تباينه σ^2 يكون $E(S^2) = \sigma^2$ و $V(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$ حيث S^2 تباين العينة.

٧– إذا كان X متغيرا عشوائيا غير سالب فبيّن أن:

(أ) $P[\sqrt{2X}-\sqrt{2n} < K]=P\left[\frac{X-n}{\sqrt{2n}} < K+\frac{K^2}{2\sqrt{2n}}\right]$

(ب) إذا كان X يتبع التوزيع χ^2 بـ n درجة من الحرية فيكون توزيع $\sqrt{2X}-\sqrt{2n}$ من أجل n كبير مساويا تقريبا للتوزيع المعياري.

(جـ) استخدم النتيجة في (ب) لتبيان أنه من أجل n كبير بكفاية يكون $V(S)\approx\frac{\sigma^2}{2(n-1)}$.

٨- ليكن X متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع χ^2 بخمسين درجة من الحرية. احسب قيمة تقريبية لِ $P(X > 68.0)$ وذلك باستخدام كل من التقريبين :

(أ) اعتبار توزيع $\frac{X-v}{\sqrt{2v}}$ مع $v = 50$ ، مساويا تقريبا للتوزيع الطبيعي المعياري.

(ب) اعتبار توزيع $\sqrt{2X}-\sqrt{2v}$ مع $v = 50$ ، مساويا تقريبا للتوزيع الطبيعي المعياري.

أي التقريبين أفضل إذا علمت أن القيمة الحقيقية لهذا الاحتمال مقربة إلى خمسة أرقام عشرية هي ، 0.04596.

٩- ليكن X وY متغيرين مستقلين و$X \sim N(5,15)$ و $Y \sim \chi^2(5)$.

احسب $P(X-5 > 1.476\sqrt{3Y})$.

١٠- بيّن أنه من أجل $v > 2$ يكون تباين التوزيع t بِـ v درجة من الحرية مساويا $\frac{v}{v-2}$.

١١- بيّن أن التوزيع $F(4, 4)$ هو :

$$g(F) = 6\,F(1+F)^{-4},\ F > 0$$

واستخدم هذه الدالة لحساب احتمال أن تأخذ النسبة S_1^2/S_2^2 قيمة أقل من $\frac{1}{2}$ أو أكبر من 2 ، حيث S_1^2 ، S_2^2 تباينا عينتين حجم كل منهما 5 من توزيعين طبيعيين لهما التباين نفسه.

١٢- إذا كان X يتبع التوزيع $F(v_1, v_2)$ فبيّن أن $Y=\frac{1}{X}$ يتبع التوزيع $F(v_2, v_1)$.

١٣- استخدم نتيجة التمرين (١٢) لتبيان أن $F_{1-\alpha,v_1,v_2} = \frac{1}{F_{\alpha,v_2,v_1}}$.

١٤- إذا كان X يتبع التوزيع بيتا $B(\alpha,\beta)$ حيث $\alpha=\frac{v_1}{2}$ ، $\beta=\frac{v_2}{2}$. بيّن أن $Y=\frac{v_2 X}{v_1(1-X)}$ يتبع التوزيع $F(v_1, v_2)$.

١٥- بيّن أنه إذا كان X يتبع التوزيع $t(v)$ فإن X^2 يتبع التوزيع $F(1, v)$.

١٦– أوجد احتمال أن يقع تباين عينة حجمها 5 من توزيع طبيعي تباينه $\sigma^2 = 25$ بين 20 و 30 وذلك باستخدام دالة كثافة χ^2 المناسبة.

١٧– يُرفض الزعم بأن تباين مجتمع طبيعي $\sigma^2 = 25$ إذا تجاوز تباين عينة حجمها 16 المقدار 54.668 أو كان أقل من 12.102 ما هو احتمال رفض زعم كهذا مع أن قيمة σ^2 هي بالفعل 25؟.

١٨– يُرفض الزعم بأن تباين مجتمع طبيعي $\sigma^2 = 4$ إذا تجاوز تباين عينة حجمها 9 المقدار 7.7535 ما هو احتمال رفض زعم كهذا مع أن قيمة σ^2 هي بالفعل 4؟

١٩– متوسط عينة حجها 25 من مجتمع طبيعي $\bar{x} = 47$ وانحرافها المعياري $S = 7$. هل يمكن، استناداً إلى الإحصاء t، القول إن معلومات العينة تدعم الظنّ بأن متوسط المجتمع $\mu = 42$؟

٢٠– متوسط عينة حجمها 12 من مجتمع طبيعي $\bar{x} = 27.8$ وتباينها $S^2 = 3.24$. هل يمكن، استنادا إلى الإحصاء t، القول إن معلومات العينة هذه تدعم الظن بأن متوسط المجتمع $\mu = 28.5$؟

٢١– لتكن X_1، ...، X_{11} عينة متوسطها $\overline{X}$ وتباينها S_1^2، ولتكن Y_1، ...، Y_{16} عينة مستقلة عن الأولى متوسطها $\overline{Y}$ وتباينها S_2^2. إذا كانت العينة الأولى من توزيع طبيعي $N(\mu_1,5)$ والثانية من توزيع طبيعي $N(\mu_2, 5)$، فأوجد توزيع كل مما يلي:

(أ) $\overline{X}$، **(ب)** $\overline{X}-\overline{Y}$، **(جـ)** $2S_1^2$، **(د)** $3S_2^2$،

(هـ) $\dfrac{\sqrt{11}(\overline{X}-\mu_1)}{S_1}$ و **(و)** $\sqrt{\dfrac{176}{27}}\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{10S_1^2+15S_2^2}}$ (5)

٢٢– بالاستفادة مما وجدته في التمرين السابق احسب:

(أ) $P(S_1^2 > 2.54\,S_2^2)$

(ب) $P(2\,S_1^2 + 3\,S_2^2 < 10.52)$

الفصل الرابع

مبادئ أساسية في التقدير

(٤-١) مقدمة

يُستخدم مصطلح التقدير في الإحصاء بصورة مشابهة تماما لاستخدامه في الحياة اليومة، فالمقاول يقدِّر تكاليف بناء عمارة، والمزارع يقدّر محصول بستان من النخيل، والطبيب يقدّر فترة إقامة مريضه في المستشفى، وقائد الطائرة يقدّر زمن الوصول في رحلة معينة إلخ.

وتتناول معظم مسائل التقدير الإحصائية مهمة تقدير قيمة معلمة واردة في عبارة دالة كثافة أو دالة احتمال، أو تقدير كمية تعتمد في قيمتها على قيمة معلمة. ولكي نتمكن من استخدام نموذج احتمالي (أو نموذج عشوائي) لابد من تقدير قيمة كل معلمة تظهر في العبارة الرياضية للنموذج. فمثلا، قد يهتم فيزيائي يدرس الإشعاع الكوني بتقدير قيمة المعلمة θ في دالة الكثافة الأسية $f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}, x > 0, \theta > 0$، لأن قيمة هذه المعلمة تساعده في تحديد معدّل أو متوسط كمية الإشعاع. ثم إن تحديد قيمة لـ θ، مثلا θ_0، تعني أنه اصطفى من بين عائلة التوزيعات $\{f(x,\theta) = \theta e^{-\theta x}, x > 0, \theta > 0\}$ ذلك العضو $\theta_0 e^{-\theta_0 x}, x > 0$، المناسب لتجاربه وأصبح قادرا على استخدامه عمليا للإجابة على تساؤلات تطرحها أبحاثه وتحرّياته حول الإشعاع الكوني. **وعلى سبيل المثال** إذا كان $x = c_0$ هو الحد الأعلى لكمية الإشعاع التي

لا تشكل خطورة على من يتعرض لها فمن المهم معرفة $P(X > c_0)$ ومع معرفتنا لقيمة المعلمة θ_0 يمكن ببساطة معرفة هذا الاحتمال بحساب التكامل $\int_{c_0}^{\infty} \theta_0 e^{-\theta_0 x} dx$.

ولتقدير معلمة θ واردة في عبارة دالة كثافة أو دالة احتمال $f(x;\theta)$ نأخذ عينة X_1 ، X_2 ، ... ، X_n من $f(x; \theta)$ ثم نعرّف إحصاء، أي دالة في مقادير العينة $T = h(X_1, ..., X_n)$ ، بحيث إنه إذا كانت القيم الملحوظة لمقادير العينة هي x_1 ، x_2 ، ... ، x_n فإن العدد $t = h(x_1,...,x_n)$ سيكون تقديرا جيدا لقيمة المعلمة θ. ولكن ماذا نعني بالتقدير الجيد؟

بما أن طريقة التقدير تعتمد على قيم عينة عشوائية فمن الطبيعي أن يشكل التقدير الذي نحصل عليه عند تطبيق هذه الطريقة (أي أخذ عينة وحساب قيمة الإحصاء T الموافقة) تقريبا جيدا أحيانا للقيمة الحقيقية للمعلمة θ ، ويختلف أحيانا أخرى اختلافا كبيرا عن هذه القيمة. وفي الحقيقة، ينبغي أن لا نطمح أبدا إلى إيجاد طريقة تقدير تعطينا دائما تقديرا قريبا من θ تحت كل ظرف ومن أجل كل عينة، ولابد أن نقتنع بصياغة قاعدة تعطينا تقديرا ناجحا "في المتوسط" أو "على المدى الطويل" أو أنها تتمتع بأن "احتمال كون التقدير تقديرا ناجحا" هو احتمال مرتفع. وهذا يعني أنه يتوجب علينا أن نتأمل أداء هذه الطريقة في سياق تطبيقها المتكرر مرة بعد أخرى في الواقع العملي، ونحكم عليها في ضوء ما تقدمه من نتائج على المدى الطويل. وبهذا المعنى ننظر إلى القاعدة أو المقدِّر $T = h\ (X_1,...,X_n)$ وكأنه يولّد مجتمعا من التقديرات (أو القيم التقديرية) للمعلمة θ له توزيع احتمالي. ولنقل أنه يولّد توزيعا من التقديرات ونقوّم مزايا هذه القاعدة أو المقدِّر من خلال خواص هذا التوزيع.

ويبدو من الواضح الآن أنه إذا كنا سنحكم على $t = h(x_1,...,x_n)$ كتقدير جيد للمعلمة θ فينبغي أن يكون هناك احتمال عال بأن الإحصاء $T = h(X_1,...,X_n)$ سيكون قريبا من θ ، أو أن θ ينبغي أن تشكل نقطة تجمّع تحتشد حولها الأعداد $t = h(x_1,...,x_n)$

التي يولّدها T عند تكرار استخدامه أو تطبيقه مرة بعد أخرى. ولو فرضنا الآن أن $E(T) = \theta$، أي أن توزيع المقدِّر T يتمركز عند القيمة الحقيقية للمعلمة θ، وعدنا إلى التفسير العملي للتوقع بأنه المتوسط على المدى الطويل، وتذكّرنا أن تباين T يمثل مدى تشتت القيم التي يأخذها T حول المركز θ ، وأنه كلما كان التباين صغيرا كلما كانت قيم T أكثر احتشادا وتجمّعا حول θ، لاتضح لنا أن وجها من أوجه تحقق المواصفات الجيدة التي تحدثنا عنها آنفا للمقدِّر T، هو أن يكون غير منحاز وذا تباين صغير قدر الإمكان.

تعـــريف (١)

المقدِّر هو دالة في مقادير العينة معرفة على فضاء المعاينة وتأخذ قيمها في فضاء المعالم.

(٤-٢) المقدِّرات غير المنحازة

تعـــريف (٢)

نقول إن الإحصاء T مقدِّر غير منحاز للمعلمة θ إذا كان:

$E(T) = \theta$ ، مهما تكن قيمة θ (١)

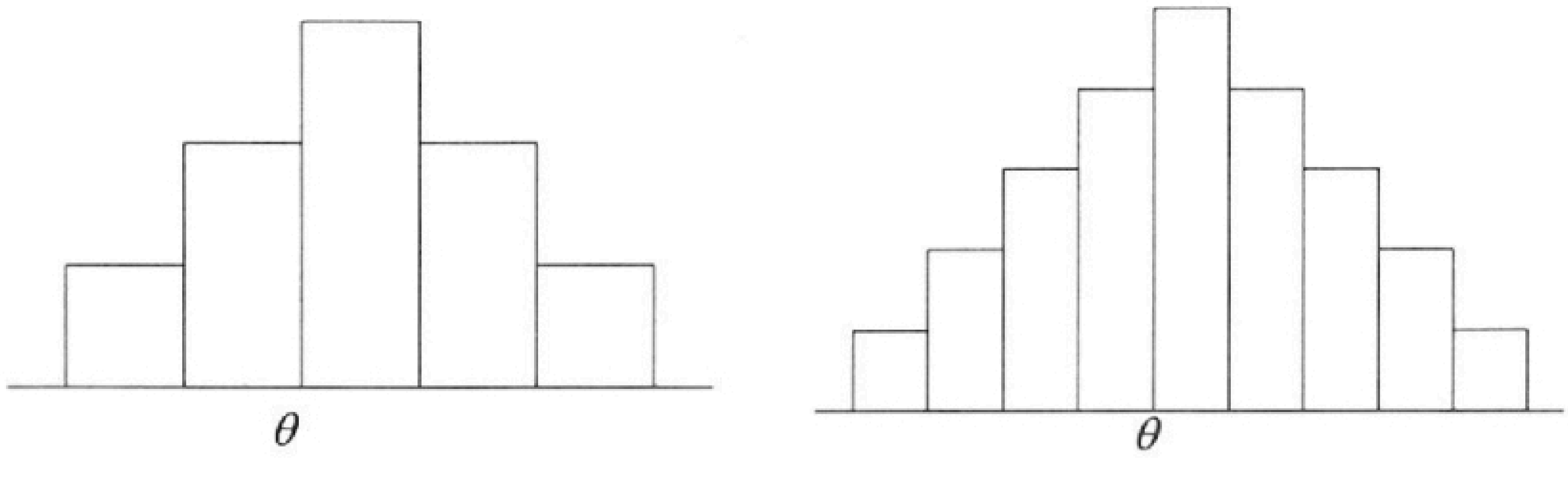
وإذا لم يكن $E(T)$ مساويا لـθ قلنا إن المقدِّر T منحاز وسيكون منحازا بالزيادة إذا كان $E(T) > \theta$ ومنحازا بالنقصان إذا كان $E(T) < \theta$.

مـــــثال (١)

ليكن $\overline{X}$ متوسط عينة حجمها n من توزيع بيرنوللي احتمال النجاح فيه يساوي p فقد رأينا أن $E(\overline{X})=p$ ، أي أن $\overline{X}$ مقدِّر غير منحاز للمعلمة p. وهذا صحيح أيا كانت قيمة p.

ومع أن صفة عدم الانحياز مرغوبة كما رأينا إلا أننا لا نريد ترك الانطباع بأنها صفة لا غنى عنها، أو لابد من تحققها، كي يكون المقدِّر جيدا. وهناك صعوبتان تعترضان صفة عدم الانحياز أولهما أن انحيازا بسيطا قد لا يكون من الأهمية بمكان إذا كان تباين المقدِّر المنحاز صغيرا بالمقارنة مع مقدِّر غير منحاز ولكن تباينه كبير. ويوضح الشكل رقم (٤-١) الفكرة، إذ أن احتمال أن يعطينا المقدِّر تقديرا للمعلمة θ قريبا منها هو أعلى في حالة المقدِّر المنحاز [الشكل رقم (٤-١ب)] (حيث التباين صغير والتوزيع متمركز تمركزا محكما) منه في حالة المقدِّر غير المنحاز [الشكل رقم (٤-١أ)] (حيث التباين كبير وتوزيع المقدِّر ينتشر انتشارا واسعا حول θ). وهكذا فإنه إذا كان مقدار الانحياز غير ذي بال، فقد تكون صفقة رابحة أن نقبل بانحياز بسيط طمعا في تخفيض ملحوظ في التباين.

والصعوبة الثانية هي أن المقدِّر غير المنحاز قد لا يكون موجودا فمثلا، قد نهتم بتقدير النسبة $p/q = p/(1-p)$ في توزيع بيرنوللي (أو التوزيع الثنائي)، إذ نعرّف مثلا نسبة الجنس في علم السكان بأنه نسبة الذكور إلى الإناث، ومع الأسف يمكن البرهان على أنه لا يوجد تقدير غير منحاز للنسبة p/q. وعدم وجود تقدير غير منحاز لا يعني العجز عن إيجاد تقدير معقول للنسبة p/q، ففي الحقيقة عندما يكون n كبيرا ينبغي أن يكون (عدد التكرارات n) /(عدد النجاحات في n تكرار) $=\overline{X}$ قريبا من p، وبالتالي يكون $1-\overline{X}$ قريبا من q وتكون النسبة $\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$ قريبة من p/q، ويكون $\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$، في حالة أن يكون عدد التكرارات n كبير على الأقل، تقديرا معقولا للنسبة p/q.



الشكل رقم (٤-١). مقارنة مقدِّر منحاز بمقدِّر غير منحاز.

(٤-٣) أنواع التقدير

هناك نوعان من التقدير لمعلمة. **النوع الأول** مفاده أن نحسب بدلالة مقادير العينة عددا واحدا نعتبره تقديرا للقيمة الحقيقية للمعلمة. وبما أن هذا العدد هو بالطبع عدد حقيقي، فيمكن تمثيله بنقطة على محور الأعداد، ولذلك نسميه تقديرا نقطيا للمعلمة. **وعلى الوجه الآخر**، يمكن أن نستنبط بدلالة مقادير العينة عددين a و b يشكلان على محور الأعداد فترة (a,b) بحيث نثق ثقة عالية بأن القيمة الحقيقية للمعلمة تقع ضمن هذه الفترة، أي نكون على درجة عالية من الاطمئنان إلى أن هذه الفترة تغطي القيمة الحقيقية للمعلمة، ولذلك يسمى هذا النوع من التقدير "التقدير بفترة". ومن الطبيعي أن تتسع الفترة كلما أردنا لدرجة الاطمئنان أو ما يسمى عادة "معامل الثقة" أن تكون عالية. وإذ يقترن التقدير بفترة بمعامل ثقة فإن التقدير النقطي يقترن بدرجة دقة تضع حدا أعلى لا يتجاوزه مُطْلق خطأ التقدير إلا فيما ندر. وسنكرس هذا الفصل للتقدير النقطي.

(٤-٤) دقة تقدير نقطي

يشبه التقدير النقطي من نواح عدة الإطلاق على هدف من مسدس. فالمقدِّر في توليده للتقديرات يشبه الرامي يطلق من المسدس على الهدف، والطلقة هي تقدير معين، والمعلمة المراد تقديرها هي الهدف. وأخذ عينة من مجتمع ثم تقدير المعلمة على أساسها يكافئ إطلاق طلقة واحدة على الهدف. ولو فرضنا أن الرامي أطلق طلقة واحدة على الهدف فأصابته تماما فإن هذا لا يكفي للاطمئنان إلى مهارة الرامي وإحكام سلاحه، ولكنه لو أطلق مرات عديدة على الهدف فيصيبه، أو لا يكاد يخطئه، فإن ثقتنا بمهارة الرامي ودقة سلاحه وإحكامه ستتنامى مع كل طلقة جديدة ناجحة حتى تصبح مع تكرّر الإطلاق الناجح ثقة وطيدة. ويمكن التعبير عن هذه الأفكار بطريقة رياضية أو تكميمها بأن نرمز بالرمز t لقيمة التقدير لمعلمة θ، وعندئذ يمثل $|t - \theta|$ مُطْلَق خطأ التقدير زيادة أو نقصانا، ويكون التوقع الرياضي لخطأ التقدير $E|t - \theta|$، أي متوسط خطأ التقدير على المدى الطويل، مقياسا ممتازا للحكم على جودة مقدِّر، أو للمفاضلة بين مقدِّر وآخر. ولأسباب تتعلق بصعوبة التعامل رياضيا مع القيم المطلقة، نتخذ معيارا مكافئا للحكم على دقة تقدير، وللمفاضلة بين مقدرين، هو متوسط مربعات الخطأ، أو $E(T - \theta)^2$. فمن الواضح أن $(t - \theta)^2$ و $|t - \theta|$ يتغيران في الاتجاه نفسه، وعندما يزداد أحدهما يزداد الآخر، والعكس، لأن $(t - \theta)^2 = (|t - \theta|)^2$. وإذا استطعنا إيجاد مقدِّر T بحيث يكون $E(T - \theta)^2 < E(U - \theta)^2$ أيا كانت θ، حيث U أي مقدِّر آخر لـ θ، فإن المقدّر T سيكون المقدِّر الأمثل. ولكن مثل هذا المقدّر المتفوق بانتظام على أي مقدر آخر هو ضرب من المستحيل. فلنتأمل في أكثر المقدِّرات غباء وجهلا، وهو مقدِّر ببغاوي ينطق دائما بالقيمة نفسها لمعلمة θ، ولنقل مثلا $\theta = 3$، وأيا كانت نتائج العينة فإنه يغفلها ويعطي كتقدير القيمة الثابتة أبدا $\theta = 3$،

فإن مثل هذه الطريقة في التقدير على سخفها وغبائها ستكون أدق من أي مقدِّر T مبني على عينة، لو اتفق أن كانت قيمة θ هي بالفعل ثلاثة. وهذا يعني أن الحل الأمثل لمسألة التقدير على إطلاقها غير موجود. إلا أن متوسط مربعات الخطأ للمقدر T كمقدِّر للمعلمة θ وسنرمز له بالرمز $MSE_T(\theta)$، أو نكتفي بالرمز $MSE(\theta)$ عند أمن الالتباس، هو المعيار المستخدم للمفاضلة بين مقدّرين. وعندما نرى أن $E(T_1 - \theta)^2 \leq E\,(T_2 - \theta)^2$ مهما تكن θ، أو $MSE_{T_1}(\theta) \leq MSE_{T_2}(\theta)$ نحكم بأن T_1 أفضل من T_2.

تعـــريف (٣)

متوسط مربعات الخطأ لمقدِّر T للمعلمة θ هو $E(T - \theta)^2$ ونرمز له بالرمز $MSE_T(\theta)$ ومن الواضح أن متوسط مربعات الخطأ لمقدِّر T يتطابق مع تباين T إذا كان المقدِّر T غير منحاز. ذلك لأن:

$$MSE_T(\theta) = E(T - \theta)^2 = E(T - E(T))^2 = V(T)$$

لنرمز بالرمز b لانحياز مقدر منحاز، أي لنفرض أن $E(T) = \theta + b$ فمن السهل ملاحظة أن:

$$\begin{aligned} MSE_T(\theta) &= E(T - \theta)^2 = E[T - E(T) + E(T) - \theta]^2 \\ &= E[T - E(T)]^2 + 2[E(T) - \theta]\,E\,[T - E(T)] + [E\,(T) - \theta]^2 \\ &= V(T) + b^2 \end{aligned}$$

أي أن متوسط مربعات الخطأ للمقدِّر T يساوي تباين T مضافا إليه مربع الانحياز في T، وعندما يكون $b = 0$ أي أن T غير منحاز فإن متوسط مربعات الخطأ والتباين يتطابقان.

وإذا قَصَرْنا اهتمامنا على المقدِّرات غير المنحازة لمعلمة θ، فإن المقدِّر الأمثل ضمن هذا الصف من المقدرات هو المقدّر غير المنحاز ذو التباين الأصغري، وذلك أيا كانت القيمة الحقيقية للمعلمة θ. ونعبر عن ذلك بقولنا إن المقدّر الأمثل ضمن صف المقدرات غير المنحازة هو المقدِّر غير المنحاز ذو التباين الأصغري بانتظام.

وإذا كان المقدّر الأمثل بين كافة المقدرات منحازة كانت أم غير منحازة غير موجود كما رأينا آنفا، فإن المقدّر غير المنحاز ذا التباين الأصغري بانتظام موجود ووحيد. ويمكن البرهان على أن المقدِّر غير المنحاز الذي يستند إلى إحصاء كاف وتام هو بين المقدرات غير المنحازة مقدر وحيد، وذو تباين أصغري بانتظام. ولا يسمح مستوى الكتاب بمناقشة تفصيلية لهذا الموضوع.

وفي ختام هذه الفقرة نذكر أنه جرت العادة على أن نقرن كل مقدِّر نقطي غير منحاز T بمعيار لدقة هذا التقدير هو الجذر التربيعي الموجب لتباينه، أو انحرافه المعياري $\sigma_T(\theta)$، وقد كتبنا θ بين قوسين للتذكير بأن عبارة σ_T ستكون بصورة عامة دالة في معلمة θ، وإذا عوضنا θ بتقدير لها، ولنرمز لهذا التقدير بالرمز $\hat{\theta}$، فيدعى $\sigma_T(\hat{\theta})$ الخطأ المعياري للمقدِّر T بدلا من الانحراف المعياري. وعلى سبيل المثال فإن $\overline{X}$ متوسط العينة مقدر غير منحاز لمتوسط المجتمع μ، وتباين $\overline{X}$ دالة في المعلمة غير المعروفة σ^2 $\left(V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}\right)$ وإذا وضعنا S^2 بدلا من σ^2 نقول إن $\frac{S}{\sqrt{n}}$ هو الخطأ المعياري للمقدّر $\overline{X}$.

(٤-٥) الاتّساق

خاصة الاتّساق لمقدِّر T تربط بين المقدِّر وحجم العينة التي بُني عليها المقدِّر. لنبدأ من مجتمع منته عدد عناصره N فمما تمليه الفطرة السليمة أنه كلما زاد حجم العينة n، كلما كان التقدير الناتج عنها أفضل، وعندما يزداد n حتى يصبح مساويا لِـ N، فإن خطأ التقدير يصبح صفرا، لأنه لم يعد هناك أصلا عملية تقدير. وعندما يكون المجتمع لانهائيا فمن الطبيعي، ومن منطلق الفطرة السليمة، أن تنطوي عملية التقدير على الخاصة إياها المذكورة آنفا، وهي أن زيادة حجم العينة لابد أن ينعكس إيجابا على جودة التقدير. وإذا لم يكن الأمر كذلك فإن الطريقة التي نتّبعها في التقدير ستكون

بوضوح منافية للفطرة السليمة، وبالتالي فهي طريقة تقدير غير مقبولة البتّة، مما يجعل من خاصة الاتّساق خاصة لابد من تحققها في كل عملية تقدير مقبولة.

تعـــريف (٤)

ليكن T_n مقدرا مبنيا على عينة حجمها n. نقول إن المقدِّر T_n مقدر متّسق للمعلمة θ، إذا وفقط إذا، كان لدينا من أجل أي $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\{|T_n-\theta|>\varepsilon\}=0 \quad \text{أو بصورة مكافئة} \quad \lim_{n\to\infty} P\{|T_n-\theta|\le\varepsilon\}=1 \qquad (٣)$$

أي أنه من أجل أي عدد موجب ε مهما كان صغيرا يمكن التحكّم باحتمال ألا يتجاوز الخطأ المطلق للتقدير العدد ε، وجعل هذا الاحتمال قريبا من الواحد بقدر ما نريد وذلك بزيادة حجم العينة n.

وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها $T_n = \overline{X}$ متوسط العينة كمقدر لـِ $\mu \equiv \theta$ متوسط المجتمع الذي جاءت منه العينة، يصبح هذا التعريف مطابقا لقانون الأعداد الكبيرة كما عرضناه في الفقرة الثالثة من الفصل الثاني.

وإذا كان المقدِّر T_n غير منحاز، أي $E(T_n) = \theta$، فيمكن باستخدام متباينة تشيبيشيف كتابة:

$$P\{|T_n-\theta|>\varepsilon\} \le \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2} \qquad (٤)$$

ويصبح شرط الاتّساق محقّقا إذا كان $\lim_{n\to\infty} V(T_n)=0$.

ولإثبات اتساق مقدِّر غير منحاز يكفي إذن إثبات أن تباينه ينتهي إلى الصفر عندما $n\to\infty$.

مـــثال (٢)

$\overline{X}$ متوسط العينة مقدِّر غير منحاز لمتوسط المجتمع، (قاعدة عامة كما نعلم) و $V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$ حيث σ^2 تباين المجتمع (وهذه قاعدة عامة أيضا). ومن الواضح أن $\overline{X}$ هو دائما مقدر متّسق لمتوسط المجتمع لأن $\lim_{n\to\infty} V(\overline{X})=\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2}{n}=0$ ، شريطة أن يكون متوسط المجتمع وتباينه موجودين.

مـــثال (٣)

بيّن أن S^2 تباين عينة حجمها n من مجتمع طبيعي تباينه σ^2 هو مقدر متّسق لتباين المجتمع σ^2. رأينا في التمرين (٦) من الفصل الثالث أن $V(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$ ونعلم أن $E(S^2)=\sigma^2$، أي أن S^2 مقدر غير منحاز لِ σ^2. وبما أن:

$$\lim_{n\to\infty} V(S^2)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sigma^4}{n-1}=0$$

فالمقدر S^2 متسق من أجل σ^2.

(٤-٦) الكفاية

رأينا أن العينة العشوائية هي الوسيلة المتاحة للقيام باستقراء إحصائي. واستخدام عينة حجمها n في الاستقراء، بكل ما ينطوي عليه الاستقراء عادة من عمليات رياضية، هو في الواقع تعامل مع n من المقادير أو المتغيرات العشوائية، مما يضفي على مسائل الاستقراء تعقيدا لا تخفى جوانبه. وقد يبلغ التعقيد درجة تعيق أو تمنع المضيّ في معالجة مسألة استقراء. والسؤال الذي يطرح نفسه، خروجا من هذه الصعوبة، هو هل يمكن الاستعاضة عن العينة بمقدار واحد محسوب بدلالة مقادير العينة، أي الاستعاضة عن العينة بإحصاء نحسبه من العينة؟ ولكن في أي عملية

استقراء حول معلمة θ ليس لدينا أي رصيد من المعلومات حول θ سوى ما تختزنه العينة، وقد يكون في إغفال مقادير العينة والاستعاضة عنها بإحصاء واحد هدر غير مقبول لمعلومات العينة، وتضحية لا مسوغ لها بجزء غير يسير من هذه المعلومات. ويسمح لنا مبدأ الكفاية بالقيام باختزال بيانات العينة دون أن نخسر في مقابل ذلك أي قدر من المعلومات التي تتضمنها العينة.

تعريف (٥)

نقول إن $T(X_1,...,X_n)$ إحصاء كاف من أجل معلمة θ إذا كان التوزيع الشرطي المشترك لمقادير العينة X_1، ...، X_n علما أن T مثبت عند قيمة t، توزيعا مستقلا عن θ. أي أن عبارة دالة الكثافة المشتركة الشرطية $f_{X_1,...,X_n}(x_1,\ldots,x_n|T=t)$ لا تعتمد على θ.

وإذ لا يعتمد توزيع العينة الشرطي على θ، فإنه لا يمكن أن يقدم لنا أية معلومات في أية عملية استقراء حول θ. وبعبارة أخرى إن جميع المعلومات التي تتضمنها العينة حول θ موجودة ومختزنة في الإحصاء الكافي T. ويشكل الإحصاء الكافي، بهذا المعنى، اختزالا ناجحا لمقادير العينة، وعدّتها n، إلى مقدار واحد هو T. وهو اختزال ناجح لأنه لا يرتّب علينا أية خسارة في المعلومات.

لننظر في T كدالة في X_1، ...، X_n فمن الواضح أنه إذا تغيرت قيمة T فإن العينة لابد أن تتغير، ذلك لأنه إذا لم يكن الأمر كذلك فسنجد عينة محددة يأخذ عندها الإحصاء T أكثر من قيمة، وهذا يتنافى مع تعريف الإحصاء كدالة في مقادير العينة. ولكن العكس غير صحيح، فقد نجد عينات كثيرة، مختلفة بعضها عن بعض، ولكن T يأخذ عند كل منها القيمة نفسها، t_0 مثلا. أي أن العينة يمكن أن تتغير دون أن تتغير قيمة T.

مــثال (٤)

لتكن X_1، X_2، X_3 عينة متوسطها $\overline{X}=4$ ، فمن الواضح أن أي ثلاثة أعداد حقيقية مجموعها 12 ، $X_1+X_2+X_3 = 12$ سيكون متوسطها $\overline{X}=4$ ، وهناك إمكــانيات لا حصر لها لوضع ثلاثة أعداد مجموعها 12. وفي المقابل لا يمكن أن يكون لعينة واحدة إلا متوسط واحد ، ولا يمكن أن يكون للعينة نفسها ، متوسطان مختلفان.

وعندما لا نقيّد العينة بأي قيد أو شرط فإنها يمكن أن تكون أي نقطة من فضاء المعاينة ، وتوزيعها الاحتمالي فوق هذا الفضاء يعتمد على المعلمة θ. ونستخدم هذا التوزيع في أي استقراء حول θ. (نختبر فرضية ، نضع فترة ثقة ، نتعرف على مواصفات تقدير نقطي وعلى دقة هذا التقدير إلخ.) وتحت الشرط $T = t$ لا يمكن أن تتغير العينة إلا فوق ذلك الجزء من فضاء المعاينة الذي يحقق الشرط $T = t$ ، ولها طبعا توزيع احتمالي فوق هذا الجزء ، والعبارة الواردة في التعريف تقول إن هذا التوزيع لا شأن له بالمعلمة θ ، ولا يمكن أن يقدّم أية فائدة في أي استقراء حول θ. إذا ثبتنا T عند قيمة t فلا يعود لمشاهدات العينة أو مفرداتها أي دور ، وكأن قيمة T قد أغنتنا عن هذه المفردات. وهذا يعني بدوره أنه إذا اعتمدنا على T كبديل عن العينة ، واقتصر اهتمامنا عند الاستقراء حول θ على القيم التي يمكن أن يفترضها المتغير T ، وعلى التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير، فإن هذا سيكون مكافئا تماما للتوزيع غير المشروط للعينة في كل ما يتعلق بالاستقراء حول θ. وهكذا نجد أن التعبير الرياضي المحكم الوارد في تعريف الإحصاء الكافي يعبر بدقة وأمانة عن فكرة الكفاية التي استعرضناها في مطلع هذه الفقرة. الإحصاء T كاف من أجل θ يعني أنه في أي عملية استقراء حول θ يكفي الاعتماد على الإحصاء T كبديل عن العينة بكاملها. ولمزيد من التوضيح لمفهوم الكفاية نقول إذا حضر مجموعة من الورثة ووقعوا عند كاتب بالعدل وكالة قانونية وشرعية لشخص

معين، بغية إتمام عملية بيع، يصبح حضور هذا الشخص كافيا عنهم، ويغني عن حضورهم في كل ما يتعلق بمعاملة البيع هذه. فالوكيل هذا يكفي عن مجموعة الموكلين. وكأن المقادير X_1، ...، X_n قد وكّلت إحصاء T ليقوم مقامها في أي استقراء حول θ، مما يجعل العمليات الرياضية والتحليلية التي كانت معقدة عند التعامل مع مقادير العينة، وعدّتها n، سهلة وميسّرة عند الاقتصار على التعامل مع مقدار واحد، فقط، وهو T، ويجعل ما كان صعب المنال أو خارج نطاق المقْدرة ممكنا وفي متناول اليد.

ونلاحظ في طرق الإحصاء أننا نقوم باختبار فرضية حول μ متوسط المجتمع، ونضع فترة ثقة لِ μ، ونقدّر μ نقطيا، مستخدمين $\overline{X}$ متوسط العينة. وعندما نرى أن $\overline{X}$ إحصاء كاف، فسنطمئن إلى أن هذه الاستقراءات تستخدم كل المعلومات التي تتضمنها العينة حول μ، وأننا لم نخسر شيئا من هذه المعلومات عندما استغنينا عن العينة واقتصر اهتمامنا على $\overline{X}$ متوسط العينة. والجدير بالذكر أن الإحصاءات التي نستخدمها في طرق الإحصاء والتحليل الإحصائي هي بصورة عامة إحصاءات كافية.

بقي أن نقول إن التحقّق من وجود إحصاء كاف من أجل معلمة θ، والتعرف عليه بتطبيق التعريف مباشرة، ليس بالأمر السّهل، نظرا لما يتطلبه من تحديد عبارة توزيع شرطي متعدد المتغيرات. ومن حُسن الطالع أن تتوافر قاعدة بسيطة للغاية، نستطيع من خلالها التعرف على وجود إحصاء كاف، وتحديد هذا الإحصاء في حال وجوده، ونقدمها فيما يلي كنظرية بدون برهان.

نظرية (١)

لتكن X_1، ...، X_n عينة من دالة الكثافة (أو دالة الاحتمال) $f(x; \theta)$. فنقول عن إحصاء T إنه كاف من أجل θ، إذا وفقط إذا، أمكن كتابة دالة الكثافة المشتركة للعينة على شكل جداء عاملين:

$$f(x_1,\ldots,x_n;\,\theta) = g(t;\,\theta)\,h(x_1,\ldots,x_n) \qquad (٥)$$

حيث لايعتمد العامل g على مقادير العينة إلا من خلال t، أما العامل h فلا يعتمد على θ.

مـــثال (٥)

لتكن X_1، ...، X_n عينة عشوائية من مجتمع طبيعي تباينه معروف $N(\mu,\sigma_0^2)$. هل هناك إحصاء كاف للمعلمة μ؟ وما هو؟

الحـــــل

$$\begin{aligned}
f(x_1,\ldots,x_n;\mu) &= \left(\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_1^n (x_i-\mu)^2\right] \\
&= \left(\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_1^n (x_i^2-2\mu x_i+\mu^2)\right] \\
&= \left(\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_0^2}(-2\mu\Sigma x_i+n\mu^2)\right].\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_1^n x_i^2\right) \\
&= \mathrm{g}\,(\Sigma\, x_i;\,\mu).\; h(x_1,\ldots,x_n)
\end{aligned}$$

حيث $g(\Sigma x_i;\mu)=\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\exp\left[\frac{\mu}{\sigma_0^2}\Sigma x_i-\frac{n\mu^2}{2\sigma_0^2}\right]$ دالة في الإحصاء $T=\sum_1^n X_i$ لا ذكر فيها لمقادير العينة إلا من خلال T والعامل الثاني $h(x_1,\ldots,x_n)=exp\left[-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_1^n x_i^2\right]$ دالة في مقادير العينة لا تعتمد على μ. والإحصاء $T=\sum_1^n X_i$ هو وفقا لقاعدة جداء العاملين إحصاء كاف من أجل μ.

ملاحـــظة (١)

إذا كان T إحصاء كافيا من أجل معلمة θ، فمن الواضح أن أي دالة من النوع $aT+b$، حيث a و b عددان ثابتان، هو أيضا إحصاء كاف. وإذا كان ΣX_i إحصاء كافياً في المثال السابق من أجل μ، فإن $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_1^n X_i$ هو أيضا إحصاء كاف والعكس.

مــثال (٦)

لتكن X_1 ، ... ، X_n عينة عشوائية من توزيع بواسـون $x = 0,1,...$ ، $f(x;\lambda) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!}$ ، فهل يوجد إحصاء كاف من أجل λ ؟ وما هو؟

الحـــل

$$f(x_1,...,x_n;\lambda) = e^{-n\lambda}\lambda^{\Sigma x_i}.\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$
$$= g(\Sigma x_i;\ \lambda).\ h\ (x_1,...,x_n)$$

حيث $g(\Sigma x_i;\lambda) = e^{-n\lambda}\lambda^{\Sigma x_i}$, $h(x_1,...,x_n) = 1\Big/\prod_{i=1}^{n} x_i!$. ووفقا لقاعدة جداء العاملين، يكون $T = \sum^{n} X_i$ إحصاء كافيا من أجل λ ، وبالتالي فإن $\overline{X}$ إحصاء كاف من أجل λ.

(٤-٧) فعّالية تقدير

إذا كان T_1 و T_2 مقدِّرين غير منحازين لمعلمة θ ، وكان $V(T_1) \le V(T_2)$ مهما تكن θ ، فعندئذ نقول إن T_1 أكثر فعالية من T_2 ونستخدم النسبة :

$$V(T_1)\ /\ V(T_2) \qquad (٥)$$

لقياس فعالية T_2 بالنسبة لِـ T_1. أي أن الفعالية تتناسب عكسا مع التباين، وكلما كان التباين أصغر، كلما كان المقدِّر أكثر فعالية. وقد درجت العادة في أدبيات الإحصاء على تعريف فعالية مقدر غير منحاز T_2 بالنسبة لمقدر غير منحاز T_1 بأنه :

$$\lim_{n\to\infty}\left[V(T_1)/V(T_2)\right] \qquad (٦)$$

مــثال (٧)

عند تقدير μ متوسط مجتمع طبيعي مستخدمين عينة حجمها $2n+1$ يمكن أن نتّخذ المتوسط $\overline{X}$ ، أو الوسيط $\tilde{X}$ ، كمقدِّرين غير منحازين لمتوسط المجتمع μ. ما هي فعالية الوسيط $\tilde{X}$ بالنسبة إلى المتوسط $\overline{X}$ ؟

الحـــــل

نعلم أن $V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{2n+1}$. ويمكن إثبات أن الوسيط $\tilde{X}$ غير منحاز، نظرا لتناظر التوزيع الطبيعي، وأن $V(\tilde{X})\approx\frac{\pi\sigma^2}{4n}$، من أجل عينات كبيرة الحجم، وبذلك تكون فعالية الوسيط $\tilde{X}$ بالنسبة للمتوسط $\overline{X}$ هي تقريبا:

$$\frac{V(\overline{X})}{V(\tilde{X})}=\frac{\sigma^2/(2n+1)}{\pi\sigma^2/4n}=\frac{4n}{\pi(2n+1)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{2}{\pi}=64\% \qquad (٧)$$

وهذا يعني عمليا أنه في حالة عينات كبيرة الحجم، وكي نحافظ على درجة الموثوقية نفسها في تقديرنا لمتوسط المجتمع μ، يكفي عند استخدامنا للمتوسط $\overline{X}$ عدد من المشاهدات هو 64% فقط من عدد المشاهدات التي نحتاجها عند استخدام الوسيط $\tilde{X}$ كمقدِّر لِ μ.

(٤–٨) معلومات فيشر (*Fisher*).

لننظر إلى دالة الكثافة (أو دالة الاحتمال) $f(x;\theta)$ كدالة في المعلمة θ، ولنفرض أنها تتمتع بعدد من خواص الانتظام مثل الاستمرار في θ، وقابلية الاشتقاق بالنسبة لِ θ، مما يسمح باشتقاق ما تحت التكامل بالنسبة لِ θ، فعندئذ نجد باشتقاق طرفي المعادلة $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;\theta)\,dx=1$ بالنسبة لِ θ مايلي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f(x;\theta)}{\partial\theta}dx=0 \qquad (٨)$$

ولكن $\frac{\partial \log f(x;\theta)}{\partial\theta}=\frac{\frac{\partial f}{\partial\theta}}{f}$ أي أن $\frac{\partial f(x;\theta)}{\partial\theta}=f\frac{\partial \log f}{\partial\theta}$. وبالتعويض في (٨) نجد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial \log f(x;\theta)}{\partial\theta}f(x;\theta)\,dx=0 \qquad (٩)$$

ويمكن كتابة هذه النتيجة على الشكل التالي:

$$E\left(\frac{\partial \log f(x;\theta)}{\partial\theta}\right)=0 \qquad (١٠)$$

ومن الواضح أن هذه النتيجة تبقى نفسها لو كانت الدالة f دالة كثافة مشتركة لعدة متغيرات، إذ نبدأ من المعادلة $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,\dots,x_n;\theta)\,dx_1\dots dx_n=1$ ونعيد الخطوات نفسها كما وردت أعلاه لننتهي بالعلاقة (١٠) نفسها.

تعريف (٦)

يعرّف فيشر المقدار $V\left(\frac{\partial log f}{\partial\theta}\right)=E\left(\frac{\partial log f}{\partial\theta}\right)^2$ بأنه المعلومات حول θ في مشاهدة واحدة من مشاهدات العينة، وسنرمز لهذه المعلومات بالرمز I.

مـــثال (٨)

احسب المعلومات في مشاهدة واحدة من مشاهدات عينة مأخوذة من توزيع طبيعي $N(\mu, 1)$.

الحـــــل

$$f(x;\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2},\ log\, f(x;\mu)=-\frac{1}{2}\log(2\pi)-\frac{1}{2}(x-\mu)^2,$$

$$\frac{\partial\log f(x;\mu)}{\partial\mu}=x-\mu,$$

$$I=E\left(\frac{\partial log f}{\partial\mu}\right)^2=E(X-\mu)^2=\sigma_X^2=1,$$

والمعلومات حول μ في مشاهدة واحدة تساوي الواحد.

والسؤال الذي يطرح نفسه الآن هو هل تساوي المعلومات في العينة مجموع المعلومات في مشاهداتها؟ والجواب نعم كما هو متوقع، إذ لو عدنا إلى دالة الكثافة المشتركة لعينة حجمها n من $f(x;\theta)$ لوجدنا كما نذكر من العلاقة (١) من الفصل الثاني أن $L(x_1,\dots,x_n;\mu)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\mu)$ وبالتالي:

$$log\, L(x_1,\dots,x_n;\theta)=\sum_{i=1}^{n}log\, f(x_i;\theta) \qquad (١١)$$

وبما أن تباين مجموع متغيرات مستقلة يساوي مجموع تبايناتها فنجد من (١١) أن:

$$V\left(\frac{\partial log\, L}{\partial\theta}\right)=V\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial log\, f}{\partial\theta}\right]=\sum_{i=1}^{n}V\left(\frac{\partial log\, f}{\partial\theta}\right)=\sum_{i=1}^{n}I=nI \qquad (١٢)$$

ونعبر عن ذلك بقولنا إن المعلومات حول معلمة θ كما عرفها فيشر تتصف بخاصة التجميعية، وأن المعلومات حول θ في عينة تساوي حجم العينة n مضروبا بالمعلومات حول θ في مشاهدة واحدة من مشاهداتها.

مـــثال (٩)

احســب المعلومــات حــول θ في عينــة حجمهــا n مــن التوزيــع الأســي $f(x;\,\theta)=\theta e^{-\theta x},\ x>0$.

الحــــل

$$log\, f(x;\,\theta)=log\,\theta-\theta x$$

$$\frac{\partial log\, f}{\partial\theta}=\frac{1}{\theta}-x;$$

$$I=V\left(\frac{\partial log\, f}{\partial\theta}\right)=V\left(\frac{1}{\theta}-X\right)=V(X)=\frac{1}{\theta^2}$$

والمعلومات في عينة حجمها n هي $\frac{n}{\theta^2}$.

ملاحظة (٢)

بالعودة إلى (٩) واشتقاق الطرفين من جديد بالنسبة إلى θ نجد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 log\, f}{\partial\theta^2}.f(x;\theta)\,dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial log\, f}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial f(x;\theta)}{\partial\theta}dx=0$$

وبالتعويض عن $\frac{\partial f}{\partial\theta}$ بما يساويها أي $\frac{\partial log f}{\partial\theta}.f$ نجد أخيرا:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial log\, f}{\partial\theta}.\frac{\partial log\, f}{\partial\theta}.f(x;\theta)\,dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 log\, f}{\partial\theta^2}.f(x;\theta)\,dx$$

أو :

$$E\left(\frac{\partial \log f}{\partial \theta}\right)^2 = E\left(-\frac{\partial^2 \log f}{\partial \theta^2}\right) = I \qquad (١٣)$$

وقد يكون استخدام سالب المشتق الثاني للوغاريتم الدالة $f(x;\theta)$ بالنسبة إلى θ أسهل عند حساب التوقع.

ملاحظة (٣)

بالعودة إلى (١١) والاستفادة من النتيجة في (١٣) نجد :

$$\log L(x_1,\dots,x_n;\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i;\theta)$$

$$-\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta^2} = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\partial^2 \log f}{\partial \theta^2}$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta^2}\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left(-\frac{\partial^2 \log f}{\partial \theta^2}\right) = \sum_{i=1}^{n} I = nI. \qquad (١٤)$$

حيث $L(x_1,\dots,x_n;\theta)$ دالة الكثافة المشتركة لعينة حجمها n من $f(x;\theta)$.

(٤-٩) متباينة كرامير – راو

لتكن X_1 ، ... ، X_n عينة عشوائية حجمها n من $f(x;\theta)$. وليكن T إحصاء توقعه يساوي دالة في θ ، مثلا $\tau(\theta)$ ، فعندئذ :

$$V(T) \geq \frac{[\tau'(\theta)]^2}{nI} \qquad (١٥)$$

حيث $I = V\left(\frac{\partial \log f}{\partial \theta}\right) = E\left[-\frac{\partial^2 \log f}{\partial \theta^2}\right]$ المعلومات في عنصر واحد من عناصر العينة.

برهـــــان

لنرمز لدالة الكثافة المشتركة للعينة بالرمز $L(x_1,\dots,x_n;\theta)$. لدينا بالفرض $E(T) = \tau(\theta)$ أي :

$$\int T\, L\,(x_1,... \quad)dx_1...\, dx_n = \tau(\theta)$$

باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ θ ، وبفرض أن الدالة L كدالة في θ تحقق شروط الانتظام التي تسمح بإدخال رمز الاشتقاق داخل إشارة التكامل ، يمكننا كتابة :

$$\int T \frac{\partial L}{\partial \theta} dx_1...dx_n = \tau'(\theta)$$

ولكن $\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial \log L}{\partial \theta}.L$ ، وبالتالي :

$$\int T \frac{\partial \log L}{\partial \theta} L(x_1,...,x_n;\theta)\, dx_1...dx_n = \tau'(\theta)$$

أو :

$$E\left(T \frac{\partial \log L}{\partial \theta}\right) = \tau'(\theta)$$

وبما أن $E\left(\frac{\partial \log L}{\partial \theta}\right) = 0$ كما نرى من (١٠) فهذا يعني أن $Cov\left(T, \frac{\partial \log L}{\partial \theta}\right) = \tau'(\theta)$ ، وأن :

$$\rho^2\left(T, \frac{\partial \log L}{\partial \theta}\right) = \frac{[\tau'(\theta)]^2}{V(T)V\left(\frac{\partial \log L}{\partial \theta}\right)} \leq 1$$

حيث يرمز ρ لمعامل الارتباط بين T و $\frac{\partial \log L}{\partial \theta}$ ، وبالاستناد إلى (١٢)، نجد أخيرا :

$$V(T) \geq \frac{[\tau'(\theta)]^2}{V\left(\frac{\partial \log L}{\partial \theta}\right)} = \frac{[\tau'(\theta)]^2}{nI}$$

وهو المطلوب.

لنفرض أننا عثرنا على مقدِّر T يحقق المساواة في متباينة كرامير - راو أي :

$$V(T) = \frac{[\tau'(\theta)]^2}{nI} \qquad (١٦)$$

فهذا يعني ضمنا أنه لا يمكن إيجاد مقدر غير منحاز لِ $\tau(\theta)$ تباينه أصغر من تباين T ، مما يعني بدوره أن T ، بين كافة المقدرات غير المنحازة لـ $\tau(\theta)$ ، هو أصغرها تباينا.

وبذلك يمكن الاستفادة من متباينة كرامير - راو للتعرف على المقدر غير المنحاز ذي التباين الأصغري للمقدار $\tau(\theta)$. وسنصطلح على تسمية مثل هذا المقدر مقدرا فعّالا، أو مقدرا يبلغ تباينه حد المعلومات. لاحظ أنه إذا كان $\tau(\theta) = \theta$ فإن المساواة (١٦) تصبح $V(T)=\frac{1}{nI}$ والمتباينة (١٥) تصبح $V(T)\geq\frac{1}{nI}$.

ولا تشكل المتباينة هذه إلا وسيلة محدودة للغاية في مضمار البحث عن المقدِّر غير المنحاز الأمثل. وهناك طرق فعّالة للوصول إلى المقدِّر غير المنحاز أي التباين الأصغري بانتظام لا يسمح مستوى الكتاب التعرض لها. ويجدر التنويه هنا إلى أن المقدِّر غير المنحاز ذا التباين الأصغري بانتظام لابد أن يستند إلى إحصاء كاف. ويشير بعض المؤلفين إلى المقدِّر الذي يستند إلى إحصاء كاف أنه مقدِّر كـــاف، وهي تسمية لا تخلو من الالتباس.

مثال (١٠)

لتكن X_1، ...، X_n عينة عشوائية من مجتمع طبيعي تباينه معروف $N(\mu,\sigma_0^2)$، بيّن أن $\overline{X}$ مقدر غير منحاز ذو تباين أصغري بانتظام لمتوسط المجتمع μ.

الحـــل

دالة الكثافة هي:

$$f(x;\mu)=\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp\left[-\frac{1}{2\sigma_0^2}(x-\mu)^2\right]$$

$$log\, f(x;\mu)=-\frac{1}{2}log(2\pi)-\frac{1}{2\sigma_0^2}(x-\mu)^2$$

$$\frac{\partial log f}{\partial\mu}=\frac{x-\mu}{\sigma_0^2}$$

$$E\left(\frac{\partial log f}{\partial\mu}\right)^2=E\left(\frac{x-\mu}{\sigma_0^2}\right)^2=\frac{\sigma_0^2}{(\sigma_0^2)^2}=\frac{1}{\sigma_0^2}$$

ووفقا لمتباينة كرامير - راو يكون $V(T) \geq \frac{1}{nI} = \frac{\sigma_0^2}{n}$ ولكن $V(\overline{X}) = \frac{\sigma_0^2}{n}$ ، وبالتالي فإن $\overline{X}$ تباين غير منحاز ذو تباين أصغري بانتظام.

ملاحظة (٤)

تتحقق المساواة في متباينة كرامير - راو، إذا وفقط إذا، كان $\frac{\partial log\, L}{\partial \theta}$ متناسبا مع الفرق بين المقدر T وتوقعه $\tau(\theta)$ أي مع $[T - \tau(\theta)]$. وبصورة عامة يمكن أن يكون ثابت التناسب دالة في θ إلى جانب حجم العينة n، ولنرمز لثابت التناسب بالرمز $k(\theta,n)$. وبذلك نصل إلى القاعدة التالية:

قاعـــــدة

إذا أمكن كتابة $\frac{\partial log\, L}{\partial \theta} = \sum_1^n \frac{\partial}{\partial \theta} log\, f(x_i, \theta)$ على الشكل:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} log\, f(x_i;\theta) = k(\theta,n)[t(x_1,\dots,x_n) - \tau(\theta)] \qquad (١٧)$$

فعندئذ يكون $T(X_1,\dots,X_n)$ مقدِّرا لِ $\tau(\theta)$ غير منحاز ذا تباين أصغري بانتظام أي مقدِّرا يبلغ تباينه حد المعلومات أو مقدِّرا فعّالا.

مـــثال (١١)

لتكن X_1، ...، X_n عينة عشوائية من $f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}, x > 0$ ولنأخذ $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$:

$$\frac{\partial log\, f}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(log\, \theta - \theta x) = \frac{1}{\theta} - x$$

$$\sum_1^n \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x_i;\theta) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\theta} - x_i\right) = -n\left(\bar{x} - \frac{1}{\theta}\right)$$

وهذا يعني أن متوسط العينة $\overline{X}$ مقدر غير منحاز ذو تباين أصغري بانتظام للمقدار $\frac{1}{\theta}$ الذي يمثل هنا $E(X)$ أو متوسط المجتمع الذي جاءت منه العينة.

(٤-١٠) طريقة العزوم

بعد أن استعرضنا مفهوم التقدير النقطي وأهم المواصفات التي نرغب للمقدَّر أن يتمتع بها، يجدر بنا استعراض أهم الطرق المتّبعة للحصول على مقدِّر، ونبدأ بطريقة العزوم.

لقد عرّفنا في الفصل الثاني عزم العينة الخام (العزم حول الصفر) من المرتبة k لعينة X_1، ...، X_n بأنه:

$$m'_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \qquad (١٨)$$

كما عرفنا في الفصل الأول العزم الخام من المرتبة k لمتغير عشوائي، أو للتوزيع الاحتمالي لهذا المتغير، بأنه:

$$\mu'_k = E(X^k) \qquad (١٩)$$

ومن الواضح أن μ'_k ستكون دالة في المعالم التي تتضمنها دالة الاحتمال أو دالة الكثافة التي نستخدمها لحساب μ'_k. وتقوم طريقة العزوم على افتراض أن العينة تمثل المجتمع الذي جاءت منه، مما يدعو إلى اعتبار قيمة عزم العينة من مرتبة k تخمينا أو تقديرا لقيمة عزم التوزيع (عزم المجتمع) الذي جاءت منه من المرتبة نفسها. وهكذا إذا كان لدينا دالة احتمال أو دالة كثافة $f(x;\ \theta_1,\dots,\ \theta_r)$ تصف مجتمعا من القياسات، وتتضمن r من المعالم θ_1، ...، θ_r، فيمكن الحصول على مقدّرات العزوم لهذه المعالم بحل جملة المعادلات التالية، وتتضمن r من المعادلات المستقلة:

$$\mu'_k(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2,\dots,\tilde{\theta}_r) = m'_k \ ,k=1,\dots,r. \qquad (٢٠)$$

حيث ترمز $\tilde{\theta}_i$ لمقدر العزوم للمعلمة θ_i، $i=1,\dots,r$.

مـــثال (١٢)

لتكن X_1، ...، X_n عينة من توزيع بواسون:

$$f(x;\theta)=e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!},\quad x=0,1,\ldots;\theta>0$$

أوجد مقدّر العزوم للمعلمة θ.

الحـــل

لدينا هنا معلمة واحدة مجهولة ونحتاج لتقديرها إلى معادلة واحدة هي :

$$\mu_1'(\tilde{\theta})=m_1'$$

ونعلم أن $\mu_1'=E(X)=\theta$ ، وبالتعويض في المعادلة أعلاه نجد :

$$\mu_1'(\tilde{\theta})=\tilde{\theta}=m_1'=\overline{X}$$

أي أن مقدر العزوم للمعلمة θ هنا هو متوسط العينة $\overline{X}$.

مـــثال (١٣)

لتكن X_1، ...، X_n عينة من توزيع طبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ أوجد مقدرات العزوم لِ μ و σ^2.

الحـــل

نحتاج هنا إلى معادلتين :

$$\mu_2'(\tilde{\mu},\tilde{\sigma}^2)=m_2' \quad ، \quad \mu_1'(\tilde{\mu},\tilde{\sigma}^2)=m_1'$$

ونعلم أن $\mu_1'=E(X)=\mu$ ، $\mu_2'=E(X^2)=\mu^2+\sigma^2$ ، $m_1'=\overline{X}$ ، $m_2'=\frac{1}{n}\sum_1^n X_i^2$.

وبالتعويض في المعادلتين أعلاه نجد المعادلتين :

$$\tilde{\mu}^2+\tilde{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_1^n X_i^2 \quad ، \quad \tilde{\mu}=\overline{X}$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد :

$$\tilde{\mu}=\overline{X}$$

$$\tilde{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_1^n X_i^2-\tilde{\mu}^2=\frac{1}{n}\sum_1^n X_i^2-\overline{X}^2=\frac{1}{n}\left[\sum_1^n X_i^2-n\overline{X}^2\right]$$

$$=\frac{1}{n}\sum_1^n (X_i-\overline{X})^2 .$$

وإذا كـان المطلـوب تقـدير دالـة $\tau(\theta)$ في المعلمـة θ ، مـثلا θ^2أو $\sqrt{\theta}$ أو $\frac{1}{\theta}$ ، إلخ. فإحـدى الطرق للحصول على مقدِّر العزوم هو حساب المقدر $\tilde{\theta}$ كما وصفنا أعلاه ثم تعويضـه في الدالة $\tau(\theta)$. وهكذا يكون مقدِّر العـزوم للدالـة $\tau(\theta)$ هـو $\tau(\tilde{\theta})$ ، مـثلا ، مقـدِّر العـزوم للمقدار θ^2 هو $\tilde{\theta}^2$ ، وللمقدار $\sqrt{\theta}$ هو $\sqrt{\tilde{\theta}}$ ، وللمقدار $\frac{1}{\theta}$ هو $\frac{1}{\tilde{\theta}}$ ، إلخ.

ومن مساوئ مقدرات العـزوم أنهـا ليسـت وحيـدة ، إذ يمكـن أن نسـتخدم العـزوم المركزية بدلا من العـزوم الخـام ، ومـا نحصـل عليـه مـن حلـول المعـادلات الناتجـة يمكـن أن يُسمى ، أيضا ، مقدرات العزوم. وتتمتع مقدِّرات العـزوم بخاصـة مرغوبـة هـي أنهـا دائمـة متّسقة.

نظرية (٢)

عزم العينة m'_r مقدِّر غير منحاز لعزم المجتمع الذي جاءت منه μ'_r ، حيـث r أي عدد صحيح منته.

برهـــان

انظر (٨) من الفصل الثاني.

وتجـدر ملاحظـة أن عـزوم العينـة المركزيـة حـول المتوسـط μ ليسـت غـير منحـازة بصورة عامة.

مـــثال (١٤)

لـدينا بـالتعريف $m_2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (X_i - \overline{X})^2$. بيّن أن $E(m_2) \neq \mu_2 = \sigma^2$ حيـث يرمـز σ^2 لتباين المجتمع الذي جاءت منه العينة.

الحـــــل

لدينا من (١٤) في الفصل الثاني :

$$E\left[\sum_{1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=(n-1)\,\sigma^2$$

وبالتالي :

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2$$

أي أن m_2 مقدر منحاز لعزم المجتمع المركزي المقابل $\mu_2=\sigma^2$.

وكما رأينا في (١٥) من الفصل الثاني فإن ما يسمى عادة تباين العينة $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ هو مقدّر غير منحاز لتباين المجتمع σ^2.

مــثال (١٥)

لتكن X_1، ...، X_n عينة عشوائية من التوزيع الطبيعي $N(\mu,\ \sigma^2)$. أوجد $E(S)$ وبيّن أن الانحراف المعياري للعينة S مقدّر منحاز للانحراف المعياري σ.

الحـــــل

رأينا في الفصل الثالث (٢١) أن دالة الكثافة للتوزيع كاي بـ v درجة من الحرية هي :

$$g(u)=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}v-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}v\right)}u^{v-1}e^{-\frac{1}{2}u^2}\ , \qquad u>0$$

حيث $u=\chi$. ومنه يمكن حساب العزم من المرتبة r بصورة عامة فنجد :

$$E(u^r)=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}v-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}v\right)}\int_0^\infty u^{r+v-1}e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du=\frac{2^{\frac{1}{2}(v+r-1)}\Gamma\left[\frac{1}{2}(v+r)\right]}{2^{\frac{1}{2}v-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}v\right)}$$

أو:

$$E(u^r)=2^{\frac{1}{2}r}\,\Gamma\left[\frac{1}{2}(v+r)\right]\Big/\Gamma\left(\frac{1}{2}v\right) \tag{٢١}$$

وبوضع $r=1$ نجد:

$$E(\chi)=\sqrt{2}\,\Gamma\left[\frac{v+1}{2}\right]\Big/\Gamma\left(\frac{1}{2}v\right) \tag{٢٢}$$

ونعلم من النظرية (٣) من الفصل الثالث أن $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\chi^2(n-1)$ ، أي أن $\frac{\sqrt{n-1}S}{\sigma}=\chi(n-1)$ وبالتالي:

$$E(S)=\frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}E\left[\chi(n-1)\right]=\frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}.\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

$$E(S)=\left[\sqrt{\frac{2}{n-1}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]\sigma\neq\sigma \tag{٢٣}$$

أي أن S مقدّر منحاز لِـ σ.

نظريـــة (٣)

مقدِّر العزوم m'_r هو مقدِّر متّسق لِـ μ'_r من أجل أي قيمة محدودة لـِ r، شريطة أن يكون μ'_{2r} موجودا.

برهـــان.

من (٩) من الفصل الثاني لدينا:

$$Var(m'_r)=\frac{1}{n}\left[\mu'_{2r}-\mu'^2_r\right]$$

ورأينا في النظرية (٢) السابقة أن $E(m'_r)=\mu'_r$.

وبما أن $\mu'_{2r}-\mu'^2_r$ محدود بالفرض فإن $\lim_{n\to\infty}Var(m'_r)=0$. وبما أن m'_r مقدِّر غير منحاز وتباينه ينتهي إلى الصفر عندما $n\to\infty$ فهو مقدِّر متّسق.

ويمكن البرهان على أن أي دالة نسبية (نسبة كثيرتي حدود) في عزوم العينة $R(m'_1,...,m'_r)$ هي مقدِّر متّسق للدالة نفسها $R(\mu'_1,...,\mu'_r)$ في عزوم المجتمع المقابلة. وتتضح أهمية هذه النتيجة مما يلي:

(أ) إذا كان m_r عزم العينة المركزي فيمكن التعبير عنه ككثيرة حدود في $m'_r,...,m'_1$.
والتعبير عن μ_r بدلالة μ'_r يؤدي إلى كثيرة الحدود نفسها. وبالتالي فإن m_r مقدِّر متّسق لِـ μ_r طالما أن كل m'_t مقدِّر متسق لِـ μ'_t ، $(t = 1,...,r)$ كما نعلم.

(ب) لنفرض أنه أمكن التعبير عن معلمة θ كدالة نسبية في $\mu'_r,...,\mu'_1$ أي $\theta = R(\mu'_1,...,\mu'_r)$ فعندئذ يكون $R(m'_1,...,m'_r)$ مقدِّر متسق للمعلمة θ.

(٤-١١) مبدأ الإمكانية العظمى

دالة الإمكانية

لنعد إلى دالة الاحتمال المشتركة أو دالة الكثافة لعينة عشوائية X_1 ، ... ، X_n مأخوذة من توزيع ينتمي إلى عائلة التوزيعات $\{f(x; \theta); \theta \in \Omega\}$ ، حيث يرمز Ω لفضاء المعالم، فقد اعتمدنا على كتابتها بالصورة التالية:

$$f(x_1,...,x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

وإذا كان X ، قياس الظاهرة التي تتطرق إليها الدراسة الإحصائية، من النوع المنفصل، فالدالة هي دالة احتمال مشتركة معرّفة على فضاء المعاينة، وتأخذ قيمها في الفترة $(0, 1)$. أما إذا كان X من النوع المتصل، فالدالة هي دالة كثافة وهي، في هذه الحالة، دالة معرفة، أيضا، على فضاء المعاينة، إلا أنها تأخذ قيمها في النصف الموجب من محور الأعداد $\{f(x) \geq 0\}$. أما المعْلمة (أو المعالم) θ المذكورة في عبارة الدالة فهي ثابت مجهول بالنسبة لنا، أي لا نعرف قيمته الحقيقية. وكما رأينا في الفصل الثاني فإن

مجموعة القيم الممكنة كافة للمعلمة θ تسمى بالتعريف، أو اصطلاحا، فضاء المعالم. وكل قيمة محددة للمعلمة θ، أي كل نقطة في فضاء المعالم، تحدد تمام التحديد توزيعا من عائلة التوزيعات التي اعتمدها الباحث أو المجرّب كعائلة مناسبة للظاهرة التي يدرسها. وسنقول أحيانا التوزيع $\theta = \theta_1$ لنعني ذلك العضو من عائلة التوزيعات التي تكون قيمة المعلمة θ فيه مساوية θ_1، أو التوزيع الذي تمثله النقطة θ_1 من فضاء المعالم.

لنفرض الآن أن الباحث قد أنهى تجربة أخذ العينة وحصل على قيم محددة x_1، x_2، ...، x_n للمتغيرات X_1، X_2، ...، X_n. فعند تعويض هذه القيم في دالة الاحتمال (أو دالة الكثافة) المشتركة يبقى الرمز الوحيد غير المحدد في عبارة الدالة هو المعلمة θ، ويصبح ما كان قبل الحصول على العينة دالة احتمال (أو دالة كثافة) مشتركة، دالة في θ. وسنرمز لها الآن بالرمز L ونكتب، $L(\theta\ ;\ x_1, x_2, \ldots, x_n)$ أو اختصارا $L(\theta)$. وعند كل نقطة من فضاء المعالم، أي من أجل كل قيمة للمعلمة θ ستأخذ هذه الدالة L قيمة عددية واحدة محددة تماما، مما يوضح أنها دالة معرفة على فضاء المعالم (تذكّر أن دالة الاحتمال أو الكثافة المشتركة كانت معرفة على فضاء المعاينة). أما قيم هذه الدالة فهي لا تزال إما احتمال أو كثافة احتمال، إنه الاحتمال الموافق للنقطة من فضاء المعاينة المثلة للعينة التي حصلنا عليها، أو الكثافة الاحتمالية الموافقة لهذه النقطة من فضاء المعاينة. وإذا تذكّرنا أنه إذا كانت كثافة الاحتمال عالية عند قيمة معينة لمتغير X فهذا يعني أن تكرار ظهور هذا القياس في مجتمع القياسات الموافق للمتغير X هو تكرار مرتفع، (نعبر أحيانا عن منحني الكثافة بأنه منحني التكرار) مما يعني بدوره أن تكون إمكانية الحصول على هذه القيمة ضمن قيم العينة إمكانية مرتفعة، والعكس بالعكس، وتذكّرنا، أيضا، أن الاحتمال يعني لغويا إمكانية، نجد أن كلمة إمكانية تُعير نفسها للحالتين على حد سواء، حالة المتغير المنفصل وما يقابله من دالة احتمال،

وحالة المتغير المتصل وما يقابله من دالة كثافة، وسنصطلح على تسمية الدالة $L(\theta)$ دالة إمكانية ونستخدمها كذلك في الحالتين.

وتلعب دالـــة الإمكانية دورا هائلا في الاستقـــــراء الإحصائي، ودورها مميّز في مسـائل التقـدير النقطـي. لنفـرض أننـا حصـلنا علـى عينـة x_1، ...، x_n ووجـدنا أن $L(\theta_1) = 2L(\theta_2)$، فهذا يعني أن إمكانية الحصول على عينة كالتي حصلنا عليها تحت التوزيع $\theta = \theta_1$ هي ضعف إمكانية الحصول عليها تحت التوزيع $\theta = \theta_2$، مما يشير بوضوح إلى أن التوزيع θ_1 مفضّل على التوزيع θ_2، كممثل للعملية العشوائية التي ولّدت لنا بيانات العينة التي حصلنا عليها.

وكما ألمحنا في مطلع هذا الفصل، فإن مسألة التقدير تتلخص في أنه بدءا من عينة نحصل عليها، نحاول بأفضل ما أوتينا من مقدرة على التخمين إعطاء قيمة تخمينية للمعلمة θ نسميها تقديرا للمعلمة θ، أي نحاول بأفضل ما أوتينا من المقدرة على الحكم السليم التعرّف على المجتمع الأم أو التوزيع، من بين عائلة التوزيعات المفترضة، الذي جاءت منه العينة. ومن هذا المنظور فإن $L(\theta_1) = 2L(\theta_2)$ تعني أن بيانات العينة تدعم المجتمع $\theta = \theta_1$ كمجتمع أمّ بمقدار يساوي ضعف دعمها للمجتمع $\theta = \theta_2$. وسيكون مجافيا لأي منطق سليم عندئذ أن نفضل القيمة θ_2 على القيمة θ_1.

من بين كافة القيم الممكنة للمعلمة θ يبدو أن أفضل قيمة نتخذها كتقدير للمعلمة θ هي تلك القيمة التي تجعل دالة الإمكانية أعظم ما يمكن. وهذا يعني أنه حالما نحصل على عينة x_1، ...، x_n فإن دالة الإمكانية $L(\theta)$ ستأخذ عند كل نقطة من فضاء المعالم قيمة محددة. وهذه القيم تمثل فرص الحصول على عينة كهذه في ظل كل توزيع من عائلة التوزيعات التي تمثلها نقاط فضاء المعاينة. ومن الطبيعي أن التوزيع الأجدر بالاعتبار هو التوزيع الذي يمنح عينة كالعينة التي حصلنا عليها أكبر فرصة.

مثال (١٦)

لدينا صندوق مغلق فيه كرات بيضاء وسوداء. ونعلم أن اللونين يتواجدان ضمن الصندوق بنسبة 1 لأحدهما إلى 4 للآخر. ولتقدير اللون السائد ضمن الصندوق سحبنا، مع الإعادة، عينة عشوائية من ثلاث كرات، وسجلنا ألوانها. ليكن X متغيرا يأخذ القيمة 1 إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء والقيمة صفر إذا كانت الكرة المسحوبة سوداء، ولنرمز لنسبة الكرات البيضاء ضمن الصندوق بالرمز θ، عندئذ يكون $P(X=1)=\theta$ و $P(X=0)=1-\theta$. والتوزيع المناسب لتجربتنا هو توزيع بيرنوللي:

$$f(x;\theta)=\theta^x(1-\theta)^{1-x},\ x=0,1;\quad 0<\theta<1.$$

ويتضمن فضاء المعالم نقطتين، فقط، فإما أن تكون $\theta=\frac{1}{5}$ أو $\theta=\frac{4}{5}$. والنقطة $\theta=\frac{1}{5}$ تمثل التوزيع $f\left(x;\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{1-x},\ x=0,1$، والنقطة $\theta=\frac{4}{5}$ تمثل التوزيع $f\left(x;\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{1-x},\ x=0,1$. أما دالة الاحتمال المشتركة لعينة X_1، X_2، X_3 فهي $f(x_1,x_2,x_3;\theta)=\theta^{\Sigma x_i}(1-\theta)^{3-\Sigma x_i}$. ويمكننا تنظيم الجدول التالي لاحتمالات العينات المختلفة تحت كل من التوزيعين:

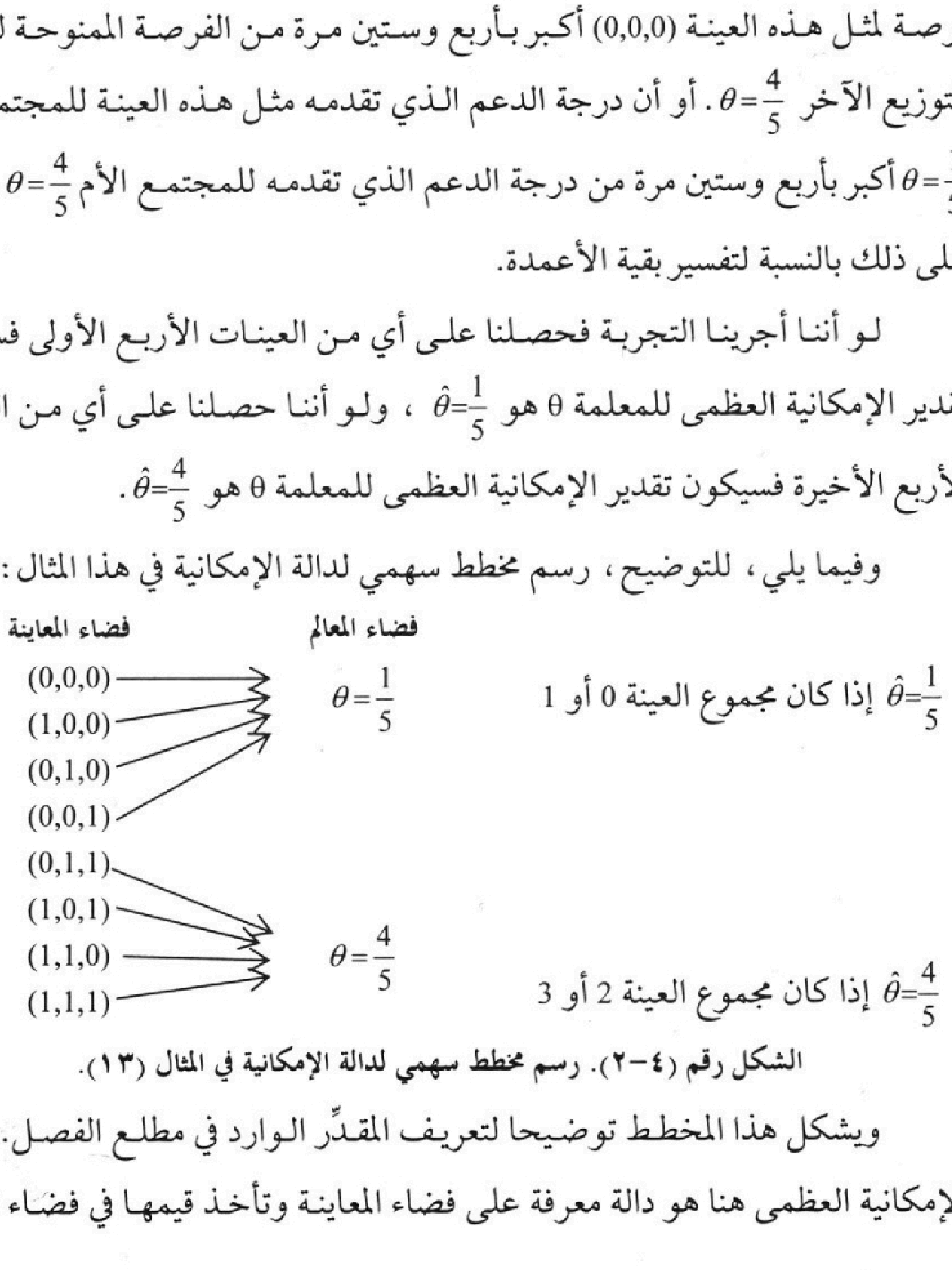
العينة / قيمة θ	(0,0,0)	(0,0,1)	(0,1,0)	(1,0,0)	(0,1,1)	(1,0,1)	(1,1,0)	(1,1,1)
$\theta=\frac{1}{5}$	0.512	0.128	0.128	0.128	0.032	0.032	0.032	0.008
$\theta=\frac{4}{5}$	0.008	0.032	0.032	0.032	0.128	0.128	0.128	0.512

لاحظ أن كل سطر في الجدول يمثل دالة احتمال مشتركة فهي تخصص لكل نقطة في فضاء المعاينة احتمالا بحيث يكون مجموع هذه الاحتمالات مساويا للواحد تماما، بينما يمثل كل عمود دالة إمكانية تأخذ قيمة محددة عند كل نقطة من فضاء المعالم. ومن الواضح أن دالة الإمكانية ليست دالة احتمال ولكن قيمها احتمالات،

ففي العمود الأول المقابل للعينة (0,0,0) تأخذ دالة الإمكانية القيمة 0.512 في النقطة $\theta=\frac{1}{5}$ وتأخذ القيمة 0.008 في النقطة $\theta=\frac{4}{5}$ ، القيمة الأولى هي احتمال الحصول على العينة (0,0,0) في ظل التوزيع $\theta=\frac{1}{5}$ والقيمة الثانية هي احتمال الحصول على العينة (0,0,0) في ظل التوزيع $\theta=\frac{4}{5}$. وكذلك الأمر في بقية الأعمدة. إن التوزيع $\theta=\frac{1}{5}$ يمنح فرصة لمثل هذه العينة (0,0,0) أكبر بأربع وستين مرة من الفرصة الممنوحة لها من التوزيع الآخر $\theta=\frac{4}{5}$. أو أن درجة الدعم الذي تقدمه مثل هذه العينة للمجتمع الأم $\theta=\frac{1}{5}$ أكبر بأربع وستين مرة من درجة الدعم الذي تقدمه للمجتمع الأم $\theta=\frac{4}{5}$. وقس على ذلك بالنسبة لتفسير بقية الأعمدة.

لو أننا أجرينا التجربة فحصلنا على أي من العينات الأربع الأولى فسيكون تقدير الإمكانية العظمى للمعلمة θ هو $\hat{\theta}=\frac{1}{5}$ ، ولو أننا حصلنا على أي من العينات الأربع الأخيرة فسيكون تقدير الإمكانية العظمى للمعلمة θ هو $\hat{\theta}=\frac{4}{5}$.

وفيما يلي، للتوضيح، رسم مخطط سهمي لدالة الإمكانية في هذا المثال:



الشكل رقم (٤-٢). رسم مخطط سهمي لدالة الإمكانية في المثال (١٣).

ويشكل هذا المخطط توضيحا لتعريف المقدِّر الوارد في مطلع الفصل. فمقدِّر الإمكانية العظمى هنا هو دالة معرفة على فضاء المعاينة وتأخذ قيمها في فضاء المعالم.

والقاعدة التي ينص عليها المقدِّر هي التي تحدد انطلاقة السهم من كل نقطة في فضاء المعاينة إلى النقطة المقابلة لها في فضاء المعالم. هذه القاعدة في حالة مقدّر الإمكانية العظمى هي أن ينطلق السهم من العينة إلى النقطة في فضاء المعالم التي تأخذ عندها دالة الإمكانية أعظم قيمة لها.

ويبدو من المنطقي أن نتّبع الطريقة نفسها عندما تكون $0 < \theta < 1$، وليس مجرّد بديلين $\theta = \frac{1}{5}$ أو $\theta = \frac{4}{5}$. وفي هذه الحالة ليس لدينا أية معلومات مسبقة عن النسب داخل الصندوق.

افترض أننا سحبنا عشوائيا مع الإعادة عينة من عشر كرات ووجدنا من بينها ست كرات بيضاء، فما هو تقدير الإمكانية العظمى لِـ θ، نسبة الكرات البيضاء داخل الصندوق؟

لدينا الآن $n = 10$، $\sum_{1}^{10} x_i = 6$ وتصبح دالة الإمكانية:

$$\begin{aligned} L(\theta;6) &= \theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n-\sum x_i}, \quad 0<\theta<1 \\ &= \theta^6(1-\theta)^{10-6}, \quad 0<\theta<1 \end{aligned}$$

والمطلوب إيجاد قيمة θ التي تجعل هذه الدالة أكبر ما يمكن. وإذا رمزنا لمقدر الإمكانية العظمى بالرمز $\hat{\theta}$، فإننا نريد $\hat{\theta}$ التي تحقق:

$$L(\hat{\theta};6) > L(\theta;6) \qquad (٢٤)$$

من أجل أي قيمة لِـ θ من الفترة $(0,1)$. وبما أن الدالة L مستمرة في θ وقابلة للاشتقاق، فيمكن اتّباع طرق حساب التفاضل والتكامل للوصول إلى غايتنا، أي بحلّ المعادلة:

$$\frac{dL(\theta;6)}{d\theta} = 0$$

ثم اختيار الجذر المناسب.

وهكذا نجد:

$$\begin{aligned} 6\,\theta^5(1-\theta)^4 - 4\,\theta^6(1-\theta)^3 &= 0 \\ 2\,\theta^5(1-\theta)^3\,[3(1-\theta) - 2\,\theta] &= 0 \end{aligned}$$

والجذور هي $\theta=0$ ، $\theta=1$ و$\theta=0.6$. والجذر الذي يحقق القيمة العظمى هو $\hat{\theta}=0.6$.

وبصورة عامة، إذا تضمنت دالة الإمكانية k من المعالم، $L(\theta_1,...,\theta_k)$، فإننا نحسب الحل المشترك لجملة المعادلات التالية وعددها k:

$$\frac{\partial L(\theta_1,\ldots,\theta_k)}{\partial\theta_i}=0 \quad , \qquad i=1,\ldots,k \tag{٢٥}$$

ثم نلتمس ذلك الحل (في حال تعدد الحلول) الذي يجعل L أعظم ما يمكن.

ولما كانت دالة اللوغاريتم دالة تقابل أحادي فإن الدالة $L(\theta_1,...,\theta_k)$ و$log\ L(\theta_1,...,\theta_k)$، يبلغان قيمهما البارزة العظمى أو الصغرى عند النقاط نفسها، وسيكون من الأيسر، بوجه عام، حل جملة المعادلات التالية بدلا من جملة المعادلات في (٢٥):

$$\frac{\partial logL(\theta_1,\ldots,\theta_k)}{\partial\theta_i} \quad , \qquad i=1,\ldots,k \tag{٢٦}$$

وفي حالة معلمة واحدة تصبح معادلة الإمكانية العظمى:

$$\frac{d\,logL(\theta)}{d\,\theta}=0 \tag{٢٧}$$

مثال (١٧)

لتكن X_1، ...، X_n عينة عشوائية من توزيع بيرنوللي:

$$p^x(1-p)^{1-x}, \quad x=0,1; \qquad 0<p<1$$

احسب مقدر الإمكانية العظمى لاحتمال النجاح p.

الحل

دالة الإمكانية هي:

$$L(p;x_1,\ldots,x_n)=p^{\sum^n x_i}(1-p)^{n-\sum^n x_i}$$

وبفرض $\sum_1^n x_i=t$ نكتب:

$$L(p) = p^t(1-p)^{n-t}$$
$$log\, L(p) = t\, log\, p + (n-t)\, log\, (1 - p)$$
$$\frac{dlog L(p)}{dp} = 0 \Leftrightarrow \frac{t}{\hat{p}} - \frac{n-t}{1-\hat{p}} = 0$$

أو :

$$\frac{t}{\hat{p}} = \frac{n-t}{1-\hat{p}} = \frac{n}{1} \Leftrightarrow \hat{p} = \frac{t}{n} = \bar{x}$$

أي أن متوسط العينة $\overline{X}$ يمثل مقدِّر الإمكانية العظمى للمعلمة p.

مـــثال (١٨)

لتكن X_1، ...، X_n عينة عشوائية من التوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$، والمطلوب مقدّر الإمكانية العظمى لمتجه المعالم (μ, σ^2).

الحـــــل

دالة الإمكانية هي :

$$L(\mu,\sigma^2;x_1,\ldots,x_n) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^n (x_i-\mu)^2\right]$$
$$log\, L(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2} log\,(2\pi) - \frac{n}{2} log\, \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^n (x_i-\mu)^2$$

لنضع : $$\frac{\partial log\, L(\mu,\sigma^2)}{\partial \mu} = 0\ ;\ \frac{\partial log\, L(\mu,\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = 0$$

فنحصل على المعادلتين :

$$\frac{1}{\hat{\sigma}^2}\sum_1^n (x_i-\hat{\mu}) = 0$$

$$-\frac{n}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{\sum_1^n (x_i-\hat{\mu})^2}{2(\hat{\sigma}^2)^2} = 0$$

ومن المعادلة الأولى نجد

$$\hat{\mu} = \bar{x}$$

وبالتعويض في المعادلة الثانية بعد ضرب الطرفين بالمقدار الموجب $\hat{\sigma}^2$ نجد :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2$$

وهكذا يشكل متوسط العينة $\overline{X}$ وتباين العينة $\frac{1}{n}\sum_1^n (X_i - \overline{X})^2$ بصورة مشتركة مقدر الإمكانية العظمى لمتجه المعالم (μ, σ^2). لاحظ أن المقدِّر $\hat{\mu}$ غير منحاز، ولكن المقدِّر $\hat{\sigma}^2$ منحاز بالنقصان كما رأينا سابقا، $E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}$.

مثال (١٩)

لتكن X_1، ...، X_n عينة عشوائية من دالة الكثافة المنتظمة :

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} \text{ ،} \quad 0 < x < \theta$$

أوجد مقدر الإمكانية العظمى للمعلمة θ.

الحـــل

دالة الإمكانية هي :

$$L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\theta^n} \text{ ،} 0 < x_i < \theta \text{ ،} i = 1, \ldots, n \qquad (٢٨)$$

ونلاحظ هنا أن مدى تغير X يعتمد على المعلمة θ، ولا تُجدي هنا طرق حساب التفاضل والتكامل وبالتالي فإن المعادلة (٢٧) غير قابلة للتطبيق. من الواضح هنا أن $\frac{1}{\theta^n}$ ستكون أكبر ما يمكن عندما تكون قيمة θ أصغر ما يمكن، وبما أن θ تشكل حدا أعلى لجميع مقادير العينة فإن θ لابد أن تحقق الشرط $\theta \ge x_{(n)}$ حيث $x_{(n)}$ يرمز لأكبر مقادير العينة. ونلاحظ أن هذا الشرط يغني عن الشروط المذكورة في (٢٨) كافة وعددها n، ويمكننا إعادة كتابة دالة الإمكانية في (٢٨) بالصورة التالية :

$$L(\theta) = \frac{1}{\theta^n} \text{ ،} \quad x_{(n)} \le \theta \qquad (٢٩)$$

ومن الواضح الآن أن أصغر قيمة يمكن أن تأخذها θ هي $x_{(n)}$. إذن مقدِّر الإمكانية العظمى للمعلمة θ هو $X_{(n)}$ أكبر مقادير العينة أو:

$$\hat{\theta}=\max_{i} X_i \quad , \ (i=1,...,n) \tag{٣٠}$$

ويبين هذا المثال أنه ينبغي ألا نعتمد دائما على طريقة الاشتقاق لحساب مقدر الإمكانية العظمى. كما يجدر الانتباه إلى أن طريقة الاشتقاق تحدد القيم البارزة الدنيا أيضا، وفي حال تعدد الجذور يجب اختيار الجذر الذي يجعل المشتق الثاني سالبا.

لنفرض الآن أننا نريد مقدِّر الإمكانية العظمى لدالة في المعلمة θ، مثلا $g(\theta)$، فيمكن البرهان على أن مقدر الإمكانية العظمى لدالة في θ هو الدالة نفسها في مقدر الإمكانية العظمى لِ θ. وهكذا يكون:

$$\widehat{g(\theta)}=g(\hat{\theta}) \tag{٣١}$$

أي نحسب تقدير θ ثم نعوضه في الدالة g فنحصل على التقدير المطلوب للدالة g. وهكذا نجد، على سبيل المثال أن $\widehat{log(\theta)}=log\hat{\theta}$ وأن تقدير $\frac{e^{\theta}-1}{3\theta^2-2}$ هو $\frac{e^{\hat{\theta}}-1}{3\hat{\theta}^2-2}$، وأن تقدير $\widehat{\mu\pm 2\sigma}$ في المثال (١٨) هو $\hat{\mu}\pm 2\hat{\sigma}$ أو $\overline{X}\pm 2S'$، حيث $S'=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$.

(٤-١٢) خواص مقدِّر الإمكانية العظمى

١- ليكن T إحصاء كافيا من أجل معلمة θ، فكما نعلم من (٥) يمكن كتابة:

$$L(\theta)=f(x_1,...,x_n;\ \theta)=g(t;\ \theta)\ h(x_1,...,x_n)$$

حيث لايعتمد g على مقادير العينة إلا من خلال t أما العامل h فلا يعتمد على θ. وهكذا تصبح معادلة الإمكانية.

$$\frac{\partial log\, L}{\partial\theta}=\frac{\partial log\, g(t;\theta)}{\partial\theta}=0$$

ومن الواضح أن أي جذر لهذه المعادلة سيكون دالة في t. وهكذا نكون قد برهنا النظرية التالية :

نظرية (٤)

إذا كان T إحصاء كافيا من أجل معلمة θ فإن مقدّر الإمكانية العظمى للمعلمة θ سيكون دالة في T.

٢− في حال وجود مقدِّر فعال T للمعلمة θ أي مقدِّر يبلغ تباينه حد المعلومات فيمكن كتابة (١٧) بعد وضع θ بدلا من $\tau(\theta)$ ، على الشكل :

$$\frac{\partial \log L(\theta; x_1, \ldots, x_n)}{\partial \theta} = K(\theta)\, T + A(\theta) \qquad (٣٢)$$

حيث $A(\theta) = -\,\theta K(\theta)$.

وبالعودة إلى معادلة الإمكانية (٢٧) نجد أن مقدر الإمكانية العظمى $\hat{\theta}$ لِـ θ يجب أن يجعل (٣٢) مساوية للصفر أي أن :

$$K(\hat{\theta})T + A(\hat{\theta}) = 0 \qquad (٣٣)$$

ولكن توقع الطرف الأيسر من (٣٢) يساوي الصفر مما يسمح لنا بكتابة :

$$K(\theta)\, E(T) + A(\theta) = 0$$

وبما أن المقدِّر الفعال مقدر غير منحاز فإن $E(T) = \theta$ وبالتالي لدينا ، وأيا كانت قيمة θ :

$$\theta K(\theta) + A(\theta) = 0$$

ومن أجل $\theta = \hat{\theta}$ ، على وجه الخصوص ، لدينا :

$$\hat{\theta} K(\hat{\theta}) + A(\hat{\theta}) = 0 \qquad (٣٤)$$

ومن (٣٣) و (٣٤) نجد أن :

$$T = -\frac{A(\hat{\theta})}{K(\hat{\theta})} = \hat{\theta}$$

أي أن مقدر الإمكانية العظمى $\hat{\theta}$ هو المقدِّر الفعال T. وهكذا نكون قد برهنا النظرية التالية.

نظرية (٥)

عند وجود تقدير فعّال لمعلمة θ فإن طريقة الإمكانية العظمى ستُنتجه.

٣- يمكن البرهان تحت شروط انتظام معينة أن مقدر الإمكانية العظمى T لمعلمة θ متّسق ويتقارب توزيعه، عندما ينتهي n إلى اللانهاية، إلى التوزيع الطبيعي بتباين يدرك حد المعلومات. أي أن T يتقارب في اللانهاية إلى أن يكون التقدير الفعال وبتوزيع مقارب هو التوزيع الطبيعي.

(٤-١٣). طريقة المربعات الصغرى

لنفرض أننا نرغب في تقدير ثابت فيزيائي θ، نقوم بتجربة قياس لهذا الثابت ولنرمز للقياس الذي نحصل عليه بالرمز Y_i. لنفرض أننا كررنا، وبصورة مستقلة، تكرار تجربة القياس هذه n مرة لنحصل على عينة عشوائية من القياسات Y_1، Y_2، ...، Y_n. فمن الواضح أنه يمكن تصور نموذج يربط بين θ وقياسها بالصورة التالية:

$$Y_i = \theta + \varepsilon_i \quad ، \quad i = 1,\dots, n \qquad (٣٥)$$

حيث $\varepsilon_i = Y_i - \theta$ هو خطأ القياس، ويمكن أن يكون خطأ بالزيادة أو بالنقصان مما يسوّغ افتراض أن $E(\varepsilon_i) = 0$، ونفترض، أيضا، أن المتغيرات ε_i مستقلة، ولكل منها التباين نفسه $E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$ ، $i = 1,\dots,n$.

تتلخص طريقة المربعات الصغرى في التقدير في التماس قيمة تقديرية للثابت θ تجعل مجموع مربعات الأخطاء $\sum_1^n \varepsilon_i^2$ أي $\sum_1^n (Y_i - \theta)^2$ أصغر ما يمكن، وهو منطلق له ما يسوّغه ومبرراته واضحة لا تحتاج إلى تفصيل. وبوضع المشتق بالنسبة لـθ مساويا

للصفر ثم حل المعادلة الناتجة نحصل على مقدِّر المربعات الصغرى للثابت المجهول θ ، كما يلي :

$$\frac{d}{d\theta}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\theta)^2=0 \tag{٣٦}$$

أي :

$$-2\sum_{1}^{n}(Y_i-\hat{\theta})=0$$

وبحل هذه المعادلة نجد :

$$\hat{\theta}=\overline{Y}$$

ومن الطبيعي أخذ $\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\varepsilon_i^2$ بعد تعويض θ بتقديرها $\hat{\theta}$ ، كمقدر للتباين σ^2. أي :

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(Y_i-\hat{\theta})^2=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2$$

لاحظ أن :

$$E(\hat{\theta})=E(\overline{Y})=E(Y)=\theta+E(\varepsilon)=\theta$$

فالمقدر $\hat{\theta}$ غير منحاز.

ويمكن البرهان أنه، من بين المقدرات غير المنحازة التي تتخذ شكل تركيب خطي $\sum_{1}^{n}a_iY_i$ في القياسات Y_i ، المقدِّر الأقل تباينا.

ما سبق يصف حالة نموذج عشوائي خطي في أبسط صوره. ويمكن تعميم الفكرة إلى حالة يبدو لنا فيها أن القياس Y_i الذي نحصل عليه هو حصيلة تجميعية لتأثيرات عدد من العوامل القابلة للقياس بدون خطأ، ولنرمز لها بالرموز X_1 ، X_2 ، ... ، X_K. وعندئذ نكتب النموذج الخطي بالصورة التالية :

$$Y_i=\theta_0+\theta_1X_{1i}+\ldots+\theta_kX_{ki}+\varepsilon_i \quad ، \quad i=1,2,\ldots,n \tag{٣٧}$$

لاحظ أن $\theta_j = \frac{\partial Y}{\partial X_j}$ ، أي أن المعامل θ_j يمثل التغير في قيمة القياس Y نتيجة تغير قدره وحدة القياس في قيمة العامل المثبت X_j ، $j = 1,...,k$. أي أن قيمة المعامل θ_j تلخص مدى تأثير العامل X_j أو فاعليته في تحديد قيمة Y ، واتجاه هذا التأثير، هل هو سلبي (إشارة θ_j سالبة) أم إيجابي (إشارة θ_j موجبة). أما المقدار ε_i فهو مقدار عشوائي توقعه يساوي الصفر. والأخطاء ε_1 ، ε_2 ، ... ، ε_n غير مترابطة فيما بينها أي $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i \neq j$ ولكل منها التباين نفسه σ^2. ويمكن الحصول على مقدرات المربعات الصغرى للمعاملات بحل المعادلات:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = 0 \quad ، \quad j = 0,1,...,k \tag{٣٨}$$

أي المعادلات:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \theta_0 - \theta_1 X_{1i} - ... - \theta_k X_{ki})^2 = 0 \tag{٣٩}$$

وسنحصل على هذه المعادلات ونحلها في حالة $k = 1$.

ففي هذه الحالة وهي حالة نموذج خطي بسيط نجد:

$$Y_i = \theta_0 + \theta_1 X_i + \varepsilon_i \quad , \quad i = 1,...,n \tag{٤٠}$$

والمعادلات في (٣٩) تصبح:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_0} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 X_i)^2 = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 X_i)^2 = 0$$

أي:

$$-2\sum_{1}^{n} (Y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 X_i) = 0$$
$$-2\sum_{1}^{n} X_i (Y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 X_i) = 0 \tag{٤١}$$

أو :

$$\sum Y_i - n\hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 \sum X_i = 0$$
$$\sum X_i Y_i - \hat{\theta}_0 \sum X_i - \hat{\theta}_1 \sum X_i^2 = 0$$

ومن المعادلة الأولى نجد :

$$\hat{\theta}_0 = \overline{Y} - \hat{\theta}_1 \overline{X}$$

وبالتعويض في المعادلة الثانية نجد :

$$\sum X_i Y_i - n\overline{X}(\overline{Y} - \hat{\theta}_1 \overline{X}) - \hat{\theta}_1 \sum X_i^2 = 0$$

وبالتالي :

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\sum_1^n Y_i X_i - n\overline{X}\,\overline{Y}}{\sum_1^n X_i^2 - n\overline{X}^2} = \frac{n\Sigma Y_i X_i - (\Sigma X_i)(\Sigma Y_i)}{n\Sigma X_i^2 - (\Sigma X_i)^2} \qquad (٤٢)$$

وبتعويض هذه القيم في عبارة $\frac{1}{n}\sum_1^n \varepsilon_i^2$ نحصل على مقدر σ^2 أي :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (Y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 X_i)^2 \qquad (٤٣)$$

مثال (٢٠)

فيما يلي درجة الرياضيات في الشهادة الثانوية X ودرجة أول مقرر في حساب التفاضل والتكامل في السنة الجامعية الأولى لكل من عشرة طلاب اختيروا عشوائيا من بين طلبة السنة الأولى في كلية العلوم :

X	39	43	21	64	57	47	28	75	34	52
Y	65	78	52	82	92	89	73	98	56	75

لنفترض أن العلاقة الإحصائية بين المتغيرين يمكن تمثيلها بالنموذج الخطي :

$$Y_i = \theta_0 + \theta_1 X_i + \varepsilon_i \quad ، \quad i = 1,\ldots,10$$

احسب تقدير المربعات الصغرى لكل من θ_0 و θ_1.

الحـــــل

ننظم الجدول الحسابي التالي ، ومن سطر المجموع في الجدول نحسب :

$$\hat{\theta}_1=\frac{10(36854)-(460)(760)}{10(23634)-(460)^2}=0.76556=0.77$$

و :

$$\hat{\theta}_0=\overline{Y}-\hat{\theta}_1\overline{X}=76-(.76556)(46)=40.78$$

والعلاقة المقدَّرة بين المتغيرين هي علاقة الخط المستقيم :

$$\hat{Y}=\hat{\theta}_0+\hat{\theta}_1 X=40.78+0.77X$$

$Y_i X_i$	X_i^2	X_i	Y_i	
2535	1521	39	65	
3354	1849	43	78	
1092	441	21	52	
5248	4096	64	82	
5244	3249	57	92	
4183	2209	47	89	
2044	784	28	73	
7350	5625	75	98	
1904	1156	34	56	
3900	2704	52	75	
36854	23634	460	760	المجموع

(٤-١٤) نظرية القرارات وتقديرات بايز (*Bayes*)

نستعرض في هذه الفقرة الختامية طريقة في التقدير تختلف عن الطرق المذكورة آنفا في هذا الفصل من حيث إن الطرق السابقة، سواء طريقة العزوم، أو طريقة الإمكانية العظمى، أو طريقة المربعات الصغرى، تعتمد كليا على المعلومات المتوافرة من العينة للوصول إلى تقدير، بينما تسمح الطريقة البايزية في التقدير باعتماد معلومات لها طابع سلفي إلى جانب المعلومات التي تقدمها العينة.

نظرية القرارات

لنفرض أن إحصائيا أو باحثا علميا يريد أن يختار إجراء معينا أو فعلا من بين مجموعة من الإجراءات أو الأفعال الممكنة. ولنفرض، أيضا، أن الفعل أو الإجراء

المناسب يتوقف على قيمة معلمة مجهولة θ ، تحدد في حال معرفتها دالة كثافة تصف احتماليا الظاهرة المدروسة ، فالطريقة المتّبعة هي أن يلجأ الإحصائي أو الباحث إلى عينة عشوائية من المجتمع $f(x;\theta)$ ثم يتخذ قراره حول الفعل المناسب أو الإجراء السليم على ضوء نتائج العينة التي حصل عليها.

ويمكن تلخيص الخطوات المتبعة فيما يلي :

١- يحدّد فضاء المعالم أو مجموعة كل القيم الممكنة للمعلمة θ.

٢- يحدد مجموعة كل الأفعال أو الإجراءات التي يمكن اتخاذها في المسألة الخاصة التي يدرسها ، وتسمى هذه المجموعة عادة "فضاء الفعل" أو "فضاء القرار" ، وسنرمز له بالرمز A.

٣- يختار دالة d في قيم العينة العشوائية وليكن ، مثلا :

$$a = d(X_1,\dots,X_n) \qquad (٤٤)$$

حيث a عنصر من عناصر الفضاء A. أي أنه ، بعبارة أخرى ، يعتزم اتخاذ الإجراء ، أو القيام بالفعل a ، حيث $a = d(x_1,\dots,x_n)$ فيما إذا أسفرت تجربته عن القيم x_1 ، ... ، x_n. وتسمى الدالة d دالة القرار ، وهي بوضوح دالة معرفة على فضاء المعاينة وتأخذ قيمها في فضاء القرار.

مـــثال (٢١)

سنجد من خلال هذا المثال كيف يمكن أن تندرج مسألة التقدير النقطي كحالة خاصة من نظرية القرارات. لتكن $f(x;\theta)$ دالة الكثافة لمجتمع طبيعي متوسطه μ وتباينه الواحد ، فالمعلمة θ ، عندئذ ، هي المتوسط μ. ونعلم أن μ يمكن أن يكون أي عدد حقيقي ، وفضاء المعالم هو بالتالي ، $\Omega = \{\mu \mid -\infty < \mu < +\infty\}$. إذا كان الفعل المطلوب هو اعتماد إحدى عناصر الفضاء Ω كقيمة تقديرية للمتوسط μ ، ولنرمز لهذا التقدير

بالرمز $\hat{\mu}$ ، فعندئذ تكون عملية التقدير النقطي فعلا أو إجراء أو قرارا ، ومن الواضح أن فضاء القرار هو $A=\{\hat{\mu}|-\infty<\hat{\mu}<+\infty\}$. وفي كل مسألة تقدير نقطي يكون فضاء المعالم Ω وفضاء القرار A متطابقين. لنفرض أننا اتخذنا كدالة قرار الدالة d_1 التي تعتمد متوسط العينة $\overline{X}$ كمقدّر $\hat{\mu}$ للمتوسط μ ، فعندئذ نكتب $\hat{\mu}=d_1(X_1,...,X_n)=\overline{X}$. وكان يمكن أن نتخذ دوال قرار أخرى ، مثلا وسيط العينة $d_2(X_1,...,X_n)=M$ ، أو غير ذلك. وبالطبع نطمح إلى اختيار دالة القرار d التي تعطينا أفضل تقدير ممكن.

مـــثال (٢٢)

لتكن $f(x;\mu)$ دالة الكثافة لمجتمع طبيعي متوسطه μ وتباينه الواحد ، ولنفرض أننا أمام اختيار أحد فعلين أو قرارين ، أولهما ولنرمز له بالرمز a_1 هو قـــــبول الزعم : "**إن المتوسط سالب**" أو $\mu<0$ ، والآخر هو رفض الزعم الأول وقبول الزعم "**إن المتوسط غير سالب**" أو $\mu\geq 0$ ، وفضاء المعالم Ω هو ، كما في المثال السابق $\Omega=\{\mu \mid -\infty<\mu<+\infty\}$. ولكن فضاء القرار يقتصر على عنصرين فقط $A=\{a_\alpha \mid a=a_1, a_2\}$ حيث a_1 تعني قبول الزعم الأول ، وa_2 تعني قبول الزعم الآخر. لنفرض أن دالة القرار d هي أن نتبنّى a_1 إذا كان متوسط عينة عشوائية X_1 ، ... ، X_n نأخذها من المجتمع المدروس سالبا ، أي إذا كان $\overline{X}<0$ ، وأن نتبنّى a_2 ، إذا تبيّن أن $\overline{X}\geq 0$. ونعيد القول هنا إنه يمكن استخدام دوال قرار أخرى. وتبقى الحاجة ماسة إلى تطوير معيار أو مقياس أو قاعدة لاختيار أجود دالة قرار ممكنة ويدعى هذا النوع من مسائل التقرير "**اختبار الفرضيات**".

بصورة عامة ، لدينا في كل مسألة تقرير مجموعة من الدوال التي يمكن أن نستخدم كلا منها كدالة قرار فأي منها نختار؟ بالطبع لابد لنا من طريقة تسمح بموازنة النتائج السلبية أو التَّبِعات التي ستترتب عند استخدامنا لكل من هذه الدوال. ومن المناسب أن نفرض أن النتيجة المترتبة عند اختيار دالة القرار d ، وبالتالي اتخاذ القرار a ،

الذي يمثل قيمة الدالة d، عبارة عن خسارة يمكن التعبير عنها كدالة عددية غير سالبة في كل من θ و a، وسنرمز لها بالرمز $l(a;\theta)$، حيث θ هي القيمة الصحيحة للمعلمة θ. ومن الواضح أن قيمة هذه الدالة أو مقدار الخسارة، تتوقف على قيم العينة x_1، ...، x_n باعتبار أن $a = d(x_1,...,x_n)$. وما يهمنا، في المقام الأول، ليس الخسارة التي نُبتلى بها عند إجراء تجربة محددة بالذات، لأن هذه الخسارة يمكن أن تكون طفيفة أو جسيمة طالما أنها تعتمد على نتائج تجربة عشوائية، وإنما يهمنا متوسط الخسارة التي يمكن أن تترتب علينا في المدى الطويل، عندما نكرر تطبيق دالة القرار d مرة بعد أخرى. ولهذه الغاية نعرف دالة أخرى تسمى **دالة المخاطرة**، وسنرمز لها بالرمز R، **وهي توقع دالة الخسارة** l.

مـــثال (٢٣)

لنعد إلى المثال (٢١) ولنفرض أننا نرغب في تقدير المتوسط μ، وأننا اتخذنا لهذا الغرض دالة الخسارة:

$$l(a; \mu) = (a - \mu)^2$$

فإذا استخدمنا دالة القرار d التالية:

$$a = \overline{X} = d(X_1, ..., X_n)$$

فإن دالة الخسارة تصبح:

$$l(\overline{x}; \mu) = (\overline{X} - \mu)^2$$

وبذلك تكون دالة المخاطرة:

$$R(d; \mu) = E(\overline{X} - \mu)^2 = \frac{1}{n}$$

وكان يمكن اتخاذ دالة الخسارة بالصيغة:

$$l(a; \mu) = |a - \mu|$$

أو:

$$l(a; \mu) = (a - \mu)^4$$

أو غير ذلك مما يبدو منسجما مع طبيعة المسألة المدروسة ومناسبا لها.

تعريف (٧)

لتكن θ معلمة تأخذ قيمها في فضاء المعالم Ω، وليكن الفعل أو القرار a عنصرا من عناصر فضاء القرار A. فعندئذ نقول إن l دالة خسارة، إذا كانت دالة عددية في a وθ، تحقق الشرطين التاليين:

أ – $l(a; \theta) \geq 0$ لجميع قيم a في A وقيم θ في Ω.

ب– لأي قيمة للمعلمة θ من Ω توجد، على الأقل، قيمة واحدة لـِ a في A بحيث يكون $l(a;\theta) = 0$.

وقيم a التي تصبح دالة الخسارة من أجلها مساوية للصفر هي التي تمثل القرار أو الفعل الصحيح تماما الموافق للقيمة θ للمعلمة، والشرطان يعنيان أن الدالة l دالة غير سالبة وأنها تساوي الصفر عندما نتخذ القرار الصحيح.

تعريف (٨)

دالة المخاطرة الموافقة لدالة القرار d ودالة الخسارة l هي بالتعريف:

$$R(d;\ \theta) = E\ [l(a;\ \theta)]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} l[d(x_1,\dots x_n);\theta]\, f(x_1,\dots,x_n;\theta)\, dx_1 \dots dx_n \qquad (٤٥)$$

حيث القرار $a = d\ (x_1,\dots,x_n)$ هو قيمة دالة القرار d من أجل عينة عشوائية x_1، ...، x_n أخذناها من المجتمع ذي دالة الكثافة $f(x;\ \theta)$.

التقدير النقطي في إطار نظرية القرارات

إذا كان الفعل أو القرار المطلوب هو إيجاد تقدير $\hat{\theta}$ للمعلمة θ، فإن $l(\hat{\theta};\theta) = 0$ إذا كان $\theta = \hat{\theta}$. وإذا فرضنا، بشكل عام، أن دالة الخسارة $l(\hat{\theta};\theta)=0$ إذا، وفقط إذا، كان $\theta = \hat{\theta}$، فعندئذ نقول إن دالة الخسارة هذه تحدد في إطار نظرية القرارات ما يُسمى

بمسألة التقدير النقطي. وتدعى دالة القرار $\hat{\theta} = d(X_1,...,X_n)$ في هذه الحالة مقدِّر θ. ويهمنا عند إيجاد مقدِّر أن تكون المخاطرة أقل ما يمكن.

وفي العديد من مسائل التقرير يبدو معقولا ومنطقيا أن نأخذ دالة الخسارة وفق الصيغة:

$$l(\hat{\theta};\theta)=\lambda(\hat{\theta}-\theta)^2 \qquad (٤٦)$$

حيث λ ثابت تناسب موجب. وهذا يعني أن الخسارة ستزداد كلما كان $\hat{\theta}$ بعيدا عن القيمة الحقيقية θ، ويمكن أن يكون ثابت التناسب λ بدوره دالة موجبة في θ، إذا أردنا تعبيرا أعم لدالة الخسارة l. أما عندما يكون $\lambda = 1$ فدالة الخسارة تصبح دالة الخطأ التربيعي كما ذكرناها في بداية هذا الفصل. ودالة المخاطرة تصبح متوسط مربعات الخطأ.

وبالإضافة إلى ذلك، إذا كان $E(\hat{\theta})=\theta$ فإن ابتغاء أصغر قيمة لدالة المخاطرة:

$$R(d;\theta)=E[l(\hat{\theta};\theta)]=E(\hat{\theta}-\theta)^2$$

يعني إيجاد دالة القرار $d=\hat{\theta}$، الذي يتصف من بين مجموعة دوال القرار $\{d\}$، التي تحقق الشرط $E(\hat{\theta})=\theta$، بأن له أصغر تباين، ونسميه الدالة d ذات التباين الأصغر، وهو بالضبط، المقدّر غير المنحاز ذو التباين الأصغر كما عرفناه آنفا.

مسألة اختيار دالة القرار

إن اعتماد دالة المخاطرة R على المعلمة θ يجعل مسألة اختيار الدالة d مسألة معقدة وشائكة. لنفرض دالّتي المخاطرة R_1، R_2 الموافقتين لدالتي القرار d_1 وd_2. إذا كان $R_1(\theta; d_1) < R_2(\theta; d_2)$ مهما تكن θ، فمن الواضح عندئذ أن d_1 مفضل على d_2، طالما أن استخدامه سيقود دوما إلى مخاطرة أصغر، وذلك بصرف النظر عن القيمة الحقيقية لـ θ. إلا أن المسألة ليست بهذا الوضوح عندما تتقاطع الدالتان R_1 وR_2. ومقارنة مثل هاتين

الدالتين تحتاج إلى معلومات إضافية. ومن أهم الطرق المتبعة لتوفير مثل هذه المعلومات هي أن نفترض أنه مع تكرار التجربة تكون المعلمة θ نفسها متغيرا عشوائيا له توزيع احتمالي، $\rho(\theta)$ مثلا، محدد تمام التحديد. ومع توافر التوزيع $\rho(\theta)$ يصبح من الممكن حساب متوسط المخاطرة، على المدى الطويل، الناشئ عن استخدام دالة القرار d، ونعني توقع $R(\theta; d)$. وسنرمز لهذا التوقع بالرمز $r(\rho,d)$ للتذكير بأن قيمة r تتوقف على شكل التوزيع $\rho(\theta)$ وعلى دالة القرار المعتمدين. وهكذا نكتب:

$$r(\rho; d) = \int R(\theta; d)\, \rho(\theta)\, d\theta \tag{٤٧}$$

ودالة القرار الأفضل d^* هي الدالة التي تجعل $r(\rho; d^*)$ أصغر ما يمكن. وتسمى هذه الطريقة بحل بايز (*Bayes*) الموافق للتوزيع السلفي (أو التوزيع السابق) ρ. ويسمى الحل الناتج "**مخاطرة بايز في** ρ". والمشكلة في هذه الطريقة هي افتراض أن θ متغير عشوائي، وأن توزيعه معروف ومحدد تماما، مما لايلقى قبولا عاما في صفوف الإحصائيين.

ويمكن النظر إلى التكامل في (٤٧) على أنه المتوسط المرجّح لدالة المخاطرة R، حيث الترجيحة هنا هي $\rho(\theta)$. وفي حدود هذا الفهم للعلاقة (٤٧) يصبح اختيار الدالة ρ معبرا عن الأهمية النسبية التي يمنحها المجرّب أو الباحث للقيم المختلفة الممكنة للمقدار θ.

تقـــــديرات بايز

لنفرض أن آلة تنتج نوعا من قطع الغيار، وأن هذه القطع يجب أن تخضع لفحص يبيّن صلاحيتها للاستعمال أو عدم صلاحيتها، ويقدّر نسبة القطع غير الصالحة من الإنتاج اليومي لهذه الآلة. وفي يوم معين اختُبرت عشر قطع، وكانت نتائج الاختبار x_1، ...، x_{10} حيث $x_i = 0$ إذا كانت القطعة غير صالحة و$x_i = 1$ إذا كانت القطعة صالحة $i = 1,...,10$. لدينا هنا عينة عشوائية حجمها $n = 10$ من توزيع بيرنوييللي باحتمال نجاح p وكما نعلم فإن مقدِّر الإمكانية العظمى للمعلمة p هو $\hat{p}=\overline{X}$.

لنفرض الآن أن المجرب قد توافرت لديه معلومات إضافية يبدو له معها وكأن النسبة p (نسبة القطع غير الصالحة في إنتاج الآلة) تتغير من يوم إلى آخر، وأن p تسلك في هذا السياق سلوك متغير عشوائي دالة كثافته:

$$h(p) = 6\,p(1 - p), \qquad 0 < p < 1$$

والسؤال الآن كيف يمكن استخدام مثل هذه المعلومات الإضافية في مسألة تقدير p؟

سنرمز الآن لدالة الكثافة المشتركة لعينة بالرمز $f(x_1,...,x_n \mid \theta)$، أي أنها دالة كثافة مشتركة شرطية للمتغيرات X_1، ...، X_n علما أن θ مثبتة عند قيمة محدودة، ذلك لأننا نعتبر θ الآن متغيرا عشوائيا.

لتكن X_1، ...، X_n عينة من دالة الكثافة $f(x \mid \theta)$، ولتكن $\rho(\theta)$ دالة الكثافة للمتغير θ، وهو التوزيع السلفي للمتغير θ. لنتذكر أن θ، بالرغم من اعتبارها كمتغير عشوائي، لا تزال تحدد من أجل كل قيمة لها دالة كثافة $f(x \mid \theta)$ وبالتالي مجتمعا معينا. والعينة التي حصلنا عليها جاءت من أحد هذه المجتمعات، وأن المطلوب هو تقدير قيمة θ الخاصة بهذا المجتمع بالذات.

لتكن دالة الخسارة $l(\hat{\theta};\theta)$، فيمكننا أن نعبر عن توقع دالة المخاطرة بالصيغة التالية:

$$B(d) = E[R(d;\theta)] = \int_{-\infty}^{+\infty} R(d;\theta)\,\rho(\theta)\,d\theta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\{\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} l[d(x_1,...,x_n);\theta]\,f(x_1,...,x_n \mid \theta)\,dx_1...dx_n\}\,\rho(\theta)\,d\theta \qquad (٤٨)$$

وتقدير بايز هو الدالة $\hat{\theta}=d(x_1,...,x_n)$ التي تجعل $B(d)$ أصغر ما يمكن.

ومع تغير ترتيب التكامل في (٤٨) بالنسبة لـِ θ من جهة وللمتغيرات x_1، ...، x_n من جهة أخرى، نجد:

$$B(d) = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\{\int_{-\infty}^{+\infty} l[d(x_1,...,x_n);\theta]\,f(x_1,...,x_n \mid \theta)\,\rho(\theta)\,d\theta\}\,dx_1...dx_n \qquad (٤٩)$$

والدالة d المطلوبة هي الدالة التي تجعل الكمية بين القوسين { } في (٤٩) أصغر ما يمكن، وذلك مهما كانت قيم المتغيرات x_i. أي أننا نريد الدالة d التي تؤدي إلى أصغر قيمة للكمية:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} l([d;\theta)\, f(x_1,\dots,x_n|\theta)\, \rho(\theta)\, d\theta \qquad (٥٠)$$

ولكن الجداء $f(x_1,\dots,x_n \mid \theta)\ \rho(\theta)$ يمثل دالة الكثافة المشتركة للمتغيرات X_1، ...، X_n، θ، وسنرمز له بالرمز $q(x_1,\dots,x_n, \theta)$، وبذلك تكون دالة الكثافة الهامشية للمتغيرات X_i هي:

$$\begin{aligned} h(x_1,\dots,x_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} q(x_1,\dots,x_n\,,\theta)\, d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,\dots,x_n|\theta)\rho(\theta)\, d\theta \end{aligned} \qquad (٥١)$$

ودالة الكثافة الشرطية للمتغير θ علما أن X_1، ...، X_n معروفة هي:

$$K(\theta|x_1,\dots,x_n) = \frac{q(x_1,\dots,x_n,\theta)}{h(x_1,\dots,x_n)} = \frac{f(x_1,\dots,x_n|\theta)\, \rho(\theta)}{h(x_1,\dots,x_n)} \qquad (٥٢)$$

ويسمى هذا التوزيع اللاحق للمتغير θ. (تذكّر أننا سمينا $\rho(\theta)$ التوزيع السلفي أو التوزيع السابق) أي أنه توزيع θ في ضوء العينة التي حصلنا عليها. ويمكن الآن إعادة كتابة (٥٠) على الشكل:

$$h(x_1,\dots,x_n) \int_{-\infty}^{+\infty} l(d;\theta)\, K(\theta|x_1,\dots,x_n)\, d\theta \qquad (٥٣)$$

وتقدير بايز هو الدالة $d{=}\hat{\theta}$ التي تجعل الدالة $v(\hat{\theta},x_1,\dots,x_n)$ أصغر ما يمكن، حيث:

$$v(\hat{\theta}, x_1,\dots,x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} l(\hat{\theta};\theta) K(\theta|x_1,\dots,x_n) d\theta \qquad (٥٤)$$

وذلك مهما تكن قيم المتغيرات X_1، ...، X_n. وتمثل الدالة v توقع دالة الخسارة في ظل التوزيع اللاحق للمتغير θ، أي أنها تمثل المخاطرة اللاحقة في عملية تقدير θ علما أن $X_i = x_i$، $i = 1,\dots,n$، وحيث x_1، ...، x_n هي قيم العينة التي حصلنا عليها.

مـــثال (٢٤)

لتكن X_1، ...، X_n عينة عشوائية من توزيع بيرنوللي:

$$f(x|\ \theta) = \theta^x(1 - \theta)^{1-x},\ x = 0,1\ ;\ 0 < \theta < 1$$

دالة الكثافة المشتركة للعينة هي:

$$f(x_1,\ldots,x_n|\ \theta) = \theta^t\ (1-\theta)^{n-t} \quad ، t = \sum_1^n x_i$$

لنفرض أن دالة الخسارة $l(\hat{\theta};\theta)=(\hat{\theta}-\theta)^2$ ، وأن توزيع θ السلفي هو التوزيع المنتظم:

$$\rho(\theta) = 1, \quad 0 < \theta < 1$$

فعندئذ:

$$q(x_1,\ldots,x_n;\theta) = \theta^t\ (1-\theta)^{n-t} \ ,$$
$$h(x_1,\ldots,x_n) = \int_0^1 \theta^t\ (1-\theta)^{n-t}\ d\theta = Be(t+1, n-t+1)\ 0 < \theta < 1$$

حيث Be ترمز للدالة بيتا. وبالتالي تكون دالة الكثافة اللاحقة للمتغير θ هي:

$$K(\theta|x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{Be(t+1,n-t+1)}\theta^t(1-\theta)^{n-t} \quad ,0 < \theta < 1 \qquad (٥٥)$$

وهي دالة التوزيع بيتا. والمطلوب هو الدالة $\hat{\theta}=d(x_1,\ldots,x_n)$ التي تجعل الدالة التالية v أصغر ما يمكن:

$$v(\hat{\theta};x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{Be(t+1,n-t+1)}\int_0^1(\hat{\theta}-\theta)^2\theta^t(1-\theta)^{n-t}\,d\theta,$$
$$=\hat{\theta}^2 - 2\hat{\theta}E(\theta) + E(\theta^2)$$

حيث التوقع مأخوذ وفق التوزيع اللاحق لـ θ كما هو واضح. ولإيجاد $\hat{\theta}$ التي تجعل ثلاثي الحدود هذا في $\hat{\theta}$ أصغر ما يمكن، نشتق بالنسبة لـ $\hat{\theta}$ ونضع المشتق مساويا للصفر، وهكذا نجد:

$$2\hat{\theta} - 2E(\theta) = 0$$

أو :

$$\hat{\theta}=E(\theta|x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{t+1}{n+2}=\frac{\sum_{1}^{n}x_i+1}{n+2}$$

وهـو تقـدير بـايز للمعلمـة θ وفـق التوزيـع السـلفي المنـتظم المفـروض ودالـة الخسـارة المستخدمة وهي دالة الخطأ التربيعي.

مـــثال (٢٥)

لتكن X_1، ...، X_n عينة عشوائية من $N(\mu, 1)$. لدينا هنا :

$$f(x|\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}$$

و :

$$f(x_1,\ldots,x_n|\mu)=(2\pi)^{-n/2}\,exp\left[-\frac{1}{2}\Sigma(x_i-\mu)^2\right]$$
$$=(2\pi)^{-n/2}\,exp\left[-\frac{1}{2}(\Sigma x_i^2-2\mu\,\Sigma x_i+n\mu^2\right]$$

لنفرض أن التوزيع السلفي أو السابق للمتغير μ هو $N(0,1)$ أي :

$$\rho(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\mu^2}\quad ، -\infty<\mu<+\infty$$

عندئذ :

$$q(x_1,\ldots,x_n;\mu)=(2\pi)^{-\frac{n+1}{2}}\,exp\left[-\frac{1}{2}(\Sigma x_i^2+(n+1)\mu^2-2\mu n\bar{x}\right]$$
$$=(2\pi)^{-\frac{n+1}{2}}\,exp\left[-\frac{1}{2}(\Sigma x_i^2-\frac{n^2\bar{x}^2}{n+1})\right]\;exp\left[-\frac{n+1}{2}\left(\mu-\frac{n\bar{x}}{n+1}\right)^2\right]$$

و :

$$h(x_1,\dots,x_n)=(2\pi)^{-\frac{n+1}{2}}\,exp\left[-\frac{1}{2}\left(\Sigma x_i^2-\frac{n^2\bar{x}^2}{n+1}\right)\right]\int_{-\infty}^{+\infty}exp\left[-\frac{n+1}{2}\left(\mu-\frac{n\bar{x}}{n+1}\right)^2\right]d\mu$$

$$=(2\pi)^{-n/2}\,exp\left[-\frac{1}{2}\left(\Sigma x_i^2-\frac{n^2\bar{x}^2}{n+1}\right)\right]\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}exp\left[-\frac{n+1}{2}\left(\mu-\frac{n\bar{x}}{n+1}\right)^2\right]d\mu$$

$$=(2\pi)^{-n/2}\,exp\left[-\frac{1}{2}\left(\Sigma x_i^2-\frac{n^2\bar{x}^2}{n+1}\right)\right].(n+1)^{-\frac{1}{2}}$$

وهكذا يكون التوزيع اللاحق لِ μ كما يلي :

$$K(\mu|x_1,\dots,x_n)=\frac{q(x_1,\dots,x_n,\mu)}{h(x_1,\dots,x_n)}$$

$$=\left(\frac{n+1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{n+1}{2}\left(\mu-\frac{n\bar{x}}{n+1}\right)^2\right]$$

أي أن توزيع μ، في ضوء العينة التي حصلنا عليها x_1، ...، x_n هو بدوره، توزيع طبيعي بمتوسط يساوي $\frac{n\bar{x}}{n+1}$، وتباين $(n+1)^{-1}$.

إذا استخدمنا الآن دالة الخطأ التربيعي $(\hat{\mu}-\mu)^2$ كدالة خسارة $l(\hat{\mu},\mu)$، فإن دالة المخاطرة اللاحقة $v(\hat{\mu}_1 x_1,\dots,x_n)$ تصبح هنا :

$$v(\hat{\mu},x_1,\dots,x_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}(\hat{\mu}-\mu)^2.K(\mu|x_1,\dots,x_n)d\mu$$

$$=E(\hat{\mu}-\mu)^2=\hat{\mu}^2-2\hat{\mu}E(\mu)+E(\mu^2)$$

وقيمة $\hat{\mu}$ التي تجعل ثلاثي الحدود هذا في $\hat{\mu}$ أصغر ما يمكن هي بالضبط حل المعادلة :

$$\frac{\partial v}{\partial\hat{\mu}}=0$$

ويكون تقدير بايز للمعلمة μ :

$$\hat{\mu}=E(\mu|x_1,x_2,\dots\dots,x_n)=\frac{n\bar{x}}{n+1}=\frac{\sum_1^n x_i}{n+1}$$

(٤ – ١٥) تمـــارين

١– في n من تجارب بيرنوللي أوجد مقدّرا غير منحـــاز لـ **(أ)** احتمال الفشل q و**(ب)** الفرق $q - p$.

٢– ليكن T مقدرا غير منحاز لِ 2θ-1، أوجد مقدرا غير منحاز لِ θ.

٣– حل التمرين السابق من أجل **(أ)** $E(T) = \frac{1}{3}\theta + 2$ و **(ب)** $E(T) = 2 - 3\theta$.

٤– إذا كان T_1 و T_2 مقدرين غير منحازين لِ θ_1 وθ_2، على الترتيب، أوجد مقدرات غير منحازة للمقادير:

(أ) $\theta_1 + \theta_2$، **(ب)** $\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$، **(جـ)** $\frac{\theta_1 + 2\theta_2}{3}$ و **(د)** $a_1\theta_1 + a_2\theta_2$.

٥– إذا كان T_1 و T_2 مقدرين غير منحازين لِ θ **(أ)** بيّن أن $\frac{T_1 + 2T_2}{3}$ هو، أيضا، مقدر غير منحاز لِ θ و **(ب)** أوجد تراكيب أخرى للمقدرين T_1، T_2 تكون غير منحازة من أجل θ.

٦– ليكن T_1 و T_2 إحصاءين توقعاهما $E(T_1) = \theta_1 + \theta_2$، $E(T_2) = \theta_1 - \theta_2$ أوجد مقدرا غير منحاز للمعلمة θ_1 ومقدرا غير منحاز للمعلمة θ_2.

٧– حل السؤال في التمرين السابق إذا كان:

(أ) $E(T_1) = \theta_1 + \theta_2$ و $E(T_2) = 2\theta_1 + 3\theta_2$

(ب) $E(T_1) = \theta_1 + 2\theta_2$ و $E(T_2) = 2\theta_1 - 3\theta_2$

٨– إذا كانت T_1، ...، T_n مقدرات غير منحازة لِ θ فبيّن أن:

(أ) $(T_1 + ... + T_n) / n$ هو، أيضا، مقدر غير منحاز لِ θ.

(ب) $(C_1 T_1 + C_2 T_2 + ... + C_n T_n) / (C_1 + C_2 + ... + C_n)$ هو أيضا مقدر غير منحاز لِ θ من أجل أية قيم للثوابت C_1، C_2، ...، C_n مجموعها غير الصفر.

٩- إذا كان T_1 و T_2 مقدرين غير منحازين لِـθ ومستقلين، أوجد مقدرا غير منحاز لِـ:

(أ) θ^2 و **(ب)** $\theta(1-\theta)$.

١٠- إذا كان X يتوزع وفق التوزيع المنتظم المنفصل:

$$f(x)=\frac{1}{N} \text{ ، } x=1,2,\ldots,N$$

أوجد مقدرا من النوع $aX+b$ غير منحاز من أجل N.

١١- بالإشارة إلى التمرين (٦) من الفصل السابق، لنأخذ تباين العينة بثلاثة أشكال هي:

$$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_1^n(X_i-\overline{X})^2 \text{ ، } S_2^2=\frac{1}{n}\sum_1^n(X_i-\overline{X})^2 \text{ ، }$$

$$S_3^2=\frac{1}{n+1}\sum_1^n(X_i-\overline{X})^2 \text{ ، }$$

ادرس الانحياز ومتوسط مربعات الخطأ لكل منها، قارن.

١٢- لتكن X_1، X_2، ...، X_n عينة من توزيع متوسطه μ وتباينه σ^2، ولنعتبر المقدِّر $T_1=a_1X_1+\ldots+a_nX_n$ وهو تركيب خطي في مقادير العينة، حيث a_1، ...، a_n ثوابت.

(أ) بيّن أن المقدّر $T_1=\sum_1^n a_iX_i$ هو مقدر غير منحاز لِـμ، إذا وفقط إذا، كان $\sum_1^n a_i=1$.

(ب) إذا كان $\sum_1^n a_i=1$، بيّن أن $V(T_1)=V(\sum_1^n a_iX_i)$ يصبح أصغر ما يمكن عندما يكون $a_i=\frac{1}{n}$، $i=1,\ldots,n$. أي عندما يكون T_1 مساويا للمتوسط $\overline{X}$.

(**إرشاد:** بيّن أن $\sum a_i^2=\sum(a_i-\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n}$ عندما يكون $\sum_1^n a_i=1$).

١٣- لتكن S_1^2، S_2^2، ...، S_k^2 تباينات k من العينات المستقلة بعضها عن بعض، وحجومها، على الترتيب، n_1، n_2، ...، n_k. وكل منها مقدِّر غير منحاز للتباين نفسه σ^2، أي $E(S_1^2)=E(S_2^2)=\ldots=E(S_k^2)=\sigma^2$. لنأخذ المقدِّر:

$$T=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2+\ldots+(n_k-1)S_k^2}{a}$$

حيث a عدد ثابت. والمطلوب تحديد a بحيث يكون T مقدرا غير منحاز لِ σ^2.

١٤- ليكن T_1 ، T_2 مقدرين غير منحازين لِ θ ومستقلين، $V(T_1)=\sigma^2$ و $V(T_2)=\tau^2$.

(أ) بيّن أن $\frac{T_1+T_2}{2}$ مقدّر غير منحاز وأفضل من T_1 إذا كان $\tau^2=\sigma^2$.

(ب) أوجد قيما لِ σ^2 و τ^2 يكون من أجلها T_1 أفضل من $(T_1+T_2)/2$.

١٥- إذا كانت T_1 ، T_2 و T_3 ثلاثة مقدرات غير منحازة لِـ θ ومستقلة، ولكل منها التباين نفسه σ^2 ، حدد أي المقدرات الثلاثة التالية تفضّل؟

$(T_1+T_2+T_3)/3$ أو $(2T_1+T_2+2T_3)/5$ أو $(T_1+2T_2+T_3)/4$

١٦- حل التمرين السابق إذا كان:

(أ) $V(T_1)=V(T_3)=\frac{1}{4}\sigma^2$ ، $V(T_2)=\sigma^2$

(ب) $V(T_1)=V(T_3)=4\sigma^2$ ، $V(T_2)=\sigma^2$

١٧- يمكن أن يتصف مقدر لِ θ بأن احتمال كونه قريبا من θ هو احتمال عال، مع أن تباين هذا المقدّر كبير. خذ، مثلا، متغيرا عشوائيا T يفترض القيمة θ باحتمال 0.99 والقيمة $\theta+1000$ باحتمال .01، احسب $V(T)$. ما هو احتمال أن يكون T قريبا من θ؟ احسب متوسط مربعات الخطأ لِـ T ولاحظ أن متوسط مربعات الخطأ لِ T يساوي تباين T مضافا إليه مربع الانحياز في T.

١٨- يقوم إحصائي بتقدير θ ويريد، باحتمال عال، أن يقع تقديره في حدود وحدتي قياس من قيمة θ زيادة أو نقصانا، ويمكنه استخدام المقدِّر T_1 وهو مقدر غير منحاز انحرافه المعياري 1، أو استخدام المقدر T_2 وهو مقدر منحاز وانحرافه المعياري $\frac{1}{2}$. كم يجب أن يبلغ الانحياز في T_2 قبل أن يتبنّى الإحصائي T_1 كمقدره الأفضل؟ افترض أن T_1 و T_2 كليهما يتوزع تقريبا وفق التوزيع الطبيعي.

١٩- لكل من التوزيعات التالية أوجد إحصاء كافيا للمعلمة الموافقة مستخدما عينة X_1، ...، X_n من التوزيع المذكور في كل حالة:

(أ) بيرنوللي، (ب) بواسون، (جـ) الأسي $f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0$

و(د) الهندسي $f(x; p) = q^x p, x = 0,1,...$.

٢٠- لتكن X_1، ...، X_n عينة عشوائية من $N(\mu, 1)$.

(أ) احسب المعلومات التي تتضمنها العينة حول μ.

(ب) بيّن أن متوسط العينة $\overline{X}$ إحصاء كاف من أجل μ.

(جـ) اكتب دالة الكثافة للمتوسط $\overline{X}$ واستخدمها لحساب المعلومات التي يتضمنها $\overline{X}$ حول μ. قارن نتيجتك مع ما وجدته في (أ). ماذا تستنتج؟.

٢١- لتكن X_1، ...، X_n عينة عشوائية من توزيع بواسون:

$$f(x;\lambda)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \text{ ، } x=0,1,... ; \lambda>0$$

(أ) احسب المعلومات التي تتضمنها العينة حول λ.

(ب) بيّن أن مجموع العينة $T=\sum_1^n X_i$ إحصاء كاف من أجل λ.

(جـ) اكتب دالة الاحتمال لمجموع العينة T واستخدمها لحساب المعلومات التي يتضمنها T حول λ. قارن نتيجتك مع ما وجدته في (أ). ماذا تستنتج؟

(د) أوجد حد المعلومات لِـ $P(X=0)$.

٢٢- لتكن X_1، ...، X_n عينة عشوائية من التوزيع الأسي:

$f(x; \theta) = \theta e^{-\theta x}, x > 0 , \theta > 0$

(أ) احسب المعلومات التي تتضمنها العينة حول θ.

(ب) بيّن أن مجموع العينة $T=\sum_1^n X_i$ إحصاء كاف من أجل θ.

(جـ) بيّن أن توزيع T هو التوزيع جاما $\Gamma(\theta ; n)$ حيث دالة الكثافة:

$$f(t;\theta)=\frac{\theta^n}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\theta t},\ \ t>0\ ,\ \theta>0$$

(د) استخدم دالة الكثافة في (جـ) لحساب المعلومات التي يتضمنها T حول θ.

قارن نتيجتك مع ما وجدته في (أ). ماذا تستنتج؟

٢٣- لتكن X_1، ...، X_n عينة من $N(0, \theta)$ حيث دالة الكثافة:

$$f(x;\theta)=(2\pi\theta)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2\theta}x^2}\ \ ,\ -\infty<x<+\infty\ \ ;\ \theta>0$$

(أ) احسب المعلومات التي تتضمنها العينة حول θ.

(ب) بيّن أن $T=\sum_1^n X_i^2$ إحصاء كاف من أجل θ.

(جـ) اكتب دالة الكثافة للمتغير T/θ واستخدمها لحساب المعلومات التي تتضمنها T حول θ. قارن نتيجتك مع ما وجدته في (أ). ماذا تستنتج؟

٢٤- استخدم طريقة العزوم لتقدير المعالم في كل من التوزيعات التالية، مستندا إلى عينة حجمها n من التوزيع المذكور:

(أ) $f(x;\theta)=e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!},x=0,1,\ldots$

(ب) $f(x)=\frac{1}{\theta},0<x<\theta$

(جـ) $f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}\ ,x>0$

(د) $f(x;\theta)=\frac{2(\theta-x)}{\theta^2}\ ,0<x<\theta$ و **(هـ)** $N(\mu, \sigma^2)$.

٢٥- بالنسبة لكل من المقدرات في التمرين السابق: **(أ)** تحقّق مما إذا كان يتصف بخاصة عدم الانحياز و **(ب)** تحقق مما إذا كان يتصف بخاصة الاتّساق.

٢٦- بالعودة إلى التمرين الأول من تمارين الفصل الثاني، أوجد مقدر العزوم ومقدر الإمكانية العظمى للمعلمة في كل من (أ)، (ب)، (جـ)، (هـ) و (ز) مع اعتبار $\alpha=\alpha_0$ معروف، (حـ)، (ط) و (ي) مع اعتبار $b=1$.

٢٧– لتكن X_1، ...، X_N عينة عشوائية حجمها N من التوزيع الثنائي $b(2, \theta)$. إذا علمت أن n_0 من مقادير العينة كان صفرا، وn_1 منها كانت قيمته 1، وn_2 منها كانت قيمته 2، $n_0 + n_1 + n_2 = \mathrm{N}$، فاحسب تقدير θ بطريقة العزوم ثم بطريقة الإمكانية العظمى.

٢٨– لتكن X_1، ...، X_n عينة من $f(x; \theta) = e^{-(x-\theta)}$, $x > \theta$ أوجد مقدر الإمكانية العظمى لِ θ.

٢٩– أوجد، بطريقة العزوم، مقدرا لكل من α ، β في توزيع جاما.

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \ ; \ x > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

٣٠– أوجد مقدر العزوم ومقدر الامكانية العظمى للمعلمة θ في التوزيع:

$$f(x; \theta) = (\theta + 1)\, x^{\theta}, 0 < x < 1, \theta > 0$$

وذلك باستخدام عينة عشوائية حجمها n من هذا التوزيع.

٣١– استخدم متباينة كرامير – راو لإيجاد مقدر غير منحاز ذي تباين أصغري بانتظام في كل من الحالات التالية، مستخدما عينة عشوائية حجمها n من التوزيع المذكور:

(أ) التوزيع الأسي $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}$, $x > 0$.

(ب) التوزيع الأسي $f(x;\theta) = \theta e^{\theta x}$, $x > 0$.

(جـ) توزيع بواسون $f(x;\lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$, $x = 0,1,...$

(د) بيرنوللي $f(x; p) = p^x (1-p)^{1-x}$ ، $n = 0,1,...$

٣٢– لتكن X مشاهدة واحدة من توزيع بيرنوللي:

$$f(x; \theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} ; x = 0, 1 , 0 < \theta < 1$$

لنعتبر المقدرين $T_1(X) = X$ و $T_2(X) = \frac{1}{2}$. ادرس الانحياز ومتوسط مربعات الخطأ لكل منهما، قارن.

٣٣- يتضمن صندوق كرات سوداء وكرات وبيضاء، سحبنا مع الإعادة عينة عشوائية حجمها n. ما هو مقدر الإمكانية العظمى للمعلمة R نسبة الكرات السوداء إلى الكرات البيضاء؟

في معاينة مختلفة، لنفرض أننا سحبنا مع الإعادة كرة بعد أخرى حتى الحصول على أول كرة سوداء، وليكن X عدد مرات السحب التي احتجناها (دون تعداد السحب الأخير). أعدنا هذه العملية n مرة لنحصل على عينة X_1، ...، X_n. ما هو مقدر الإمكانية العظمى للمعلمة R على أساس هذه العينة.

٣٤- لنرمز لنصف قطر دائرة بالرمز R. إذا أجرينا n قياسا مستقلا X_1، X_2، ...، X_n، لنصف القطر R، فيمكن كتابة $X_i = R + \varepsilon_i$، $i = 1,...,n$، حيث ε_i خطأ القياس. لنفرض أن الخطأ ε_i يتوزع وفق التوزيع الطبيعي $N(0, \sigma^2)$، حيث σ^2 غير معروف. أوجد مقدرا غير منحاز لمساحة الدائرة.

٣٥- لتكن X_1، ...، X_n عينة عشوائية من التوزيع:

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1};\quad 0 < x < 1,\quad \theta > 0$$

(أ) أوجد مقدر الإمكانية العظمى للمتوسط $E(X) = \mu = \theta / (1 + \theta)$

(ب) هل يوجد إحصاء كاف من أجل θ؟ وما هو؟

(جـ) هل هناك دالة في θ يوجد من أجلها مقدِّر غير منحاز يبلغ تباينه حد المعلومات في متباينة كرامير - راو؟

٣٦- يعلم مجرب أن توزع العمر لمركبة إلكترونية هو التوزيع الأسي السالب:

$$f(x;\theta) = \theta\ e^{-\theta x},\quad x > 0,\quad \theta > 0$$

أخذ المجرب عينة عشوائية من الأعمار x_1، ...، x_n ويرغب الاستفادة من هذه العينة لتقدير وسيط العمر لهذا النوع من المركبات. أوجد مقدر الإمكانية العظمى لوسيط العمر.

٣٧- يفترض محل لبيع السيارات المستعملة أن عدد السيارات المباعة في اليوم هو متغير عشوائي X يتبع توزيع بواسون $p(x;\ \lambda)$. ومن بيانات العام الماضي كان تقدير الإمكانية العظمى للمعلمة λ هو $\hat{\lambda}=\frac{1}{3}$ ($\frac{1}{3}$ سيارة في اليوم). ما هو تقدير الإمكانية العظمى لاحتمال أن يبيع اليوم سيارة واحدة على الأقل، مستخدما المعلومات المعطاة آنفا؟

٣٨- افترض أن أوزان البالغين في المملكة تشكل مجتمعا طبيعيا $N(\mu,\ \sigma^2)$، وأن عينة من الأوزان أعطت تقدير الإمكانية العظمى $\hat{\mu}=77$ كغم و $\hat{\sigma}=11$ كغم. ما هو تقدير الإمكانية العظمى للوزن الذي يتجاوزه 10 بالمائة فقط من المجتمع؟ ما هو تقدير الإمكانية العظمى للنسبة من أفراد المجتمع الذين تقع أوزانهم بين 63 كغم و 85.5 كغم؟

٣٩- إذا لاحظنا أنه يمكن كتابة θ_1 في العلاقة (٤٢) في صيغة تركيب خطي في المشاهدات Y_i أي $\hat{\theta}_1=\sum_1^n k_i Y_i$ حيث $k_i=\dfrac{X_i-\overline{X}}{nS_x^2}$ ، $nS_X^2=\sum^n X_i^2-n\overline{X}^2=\sum_1^n (X_i-\overline{X})^2$. بيّن أن:

(أ) $\sum_1^n k_i=0$ ، $\sum_1^n k_i X_i=1$

(ب) $E(\hat{\theta}_1)=\theta_1$ ، $E(\hat{\theta}_0)=\theta_0$

٤٠- فيما يلي عدد ساعات المذاكرة التي قضاها كل من عشرة طلاب في التحضير لامتحان مقرر معين، والدرجات التي نالوها في ذلك المقرر:

عدد ساعات المذاكرة x	8	5	11	13	10	5	18	15	2	8
الدرجة y	56	44	79	72	70	54	94	85	33	65

والمطلوب وضع نموذج خطي بسيط يعبر عن الدرجة y بدلالة عدد ساعات المذاكرة x وتقدير معالم النموذج.

٤١ – لتكن X_1 ، X_2 عينة عشوائية من التوزيع الطبيعي $N(\mu, 1)$. وسنعتبر كتقدير نقطي لِـ μ كلا من :

$$\hat{\mu}_1 = d_1(X_1, \; X_2) = \frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 \quad ، \quad \hat{\mu}_2 = d_2(X_1, \; X_2) = \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2 \quad ،$$

$$\hat{\mu}_3 = d_3(X_1, \; X_2) = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$$

ولنعتبر دالة الخسارة $l(\hat{\mu},\mu) = 3\mu^2(\hat{\mu} - \mu)^2$ ، والمطلوب :

(أ) عرف فضاء القرار وفضاء المعالم.

(ب) أوجد $R(d_1, \mu)$ ، $R(d_2, \mu)$ و $R(d_3, \mu)$.

(جـ) كيف يمكن مقارنة d_1 ، d_2 و d_3.

(د) أوجد الفعالية النسبية لِـ d_1 إلى d_2 ، d_1 إلى d_3 و d_2 إلى d_3.

٤٢ – لتكن X_1 ، ... ، X_n ، عينة عشوائية من توزيع بواسون :

$$f(x|\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^x}{x!}, \quad x = 0,1,\ldots \;\; ; \;\; \lambda > 0$$

افترض أن التوزيع السلفي لِـ λ هو التوزيع الأسي البسيط $\rho(\lambda) = e^{-\lambda}$ ، $\lambda > 0$.

(أ) أوجد التوزيع اللاحق لِـ λ.

(ب) أوجد تقدير بايز لِـ λ متخذا دالة الخطأ التربيعي كدالة خسارة.

٤٣ – لتكن X_1 ، ... ، X_n عينة عشوائية من

$$f(x\,|\,\theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad \theta < x < 1 \quad , \theta > 0$$

افترض أن التوزيع السلفي لِـ θ هو التوزيع جاما :

$$g(\theta) = \frac{1}{\Gamma(r)}\theta^{\,r-1}e^{-\theta}, \theta > 0$$

حيث r معروفة.

(أ) أوجد التوزيع اللاحق لِـ θ.

(ب) أوجد تقدير بايز لِـ θ متخذا دالة الخطأ التربيعي كدالة خسارة.

الفصل الخامس

فترات الثقة

(٥-١) مقدمة

عند الحصول على مقدر نقطي لمعلمة θ، مثلا، لا نستطيع، بصورة عامة، تقديم معيار كمي لمدى الثقة بهذا المقدّر، ولو بنينا المقدّر النقطي على إحصاء كاف، وكان، مثلا، غير منحاز وذا تباين أصغري، فإن القيمة التقديرية الناتجة تعطينا فكرة عن مقدار θ الحقيقي، ونتوقع، فضلا عن ذلك، أن تكون هذه القيمة قريبة من قيمة θ الحقيقية، ولكن هذا لايعطينا فكرة عن مدى قرب أو بعد القيمة التقديرية من القيمة المراد تقديرها.

وسنناقش في هذا الفصل تقدير معلمة θ بفترة ثقة تقدم لنا فكرة عن مقدار θ وتقترن بما يمكن أن نسميه درجة طمأنينة، أو معامل ثقة، إلى أن الفترة المعطاة ستغطي القيمة الحقيقية للمعلمة θ، بمعنى أنها ستتضمن بين طرفيها هذه القيمة.

تعـــريف (١)

لتكن X_1، X_2، ...، X_n عينة عشوائية من دالة كثافة (أو احتمال) $f(x;\ \theta)$. إذا كان L_1 وL_2 إحصاءين بحيث أن:

$$P(L_1 \leq \theta \leq L_2) \geq 1 - \alpha \qquad (١)$$

مهما تكن قيمة θ ، فتُسمى الفترة $[L_1, L_2]$ ، $100\ (1 - \alpha)\%$ فترة ثقة للمعلمة θ.

ويمكن أن يكون أي من L_1 و L_2 عددا ثابتا أو لا نهائيا. وأول ما نلاحظه أن العبارة الاحتمالية في هذا التعريف تختلف جذريا عما اعتدناه في نظرية الاحتمالات، حيث نواجه، مثلا، $P(a \leq X \leq b) \geq 1 - \alpha$ ، حيث a و b ثابتان والمتغير X بينهما.

ولكن في عبارة التعريف نجد أن الثابت يتخذ موقعا بينيا والطرفان L_1 وL_2 متغيران عشوائيان يختلفان من عينة إلى أخرى. ويمكننا أن نعطي التفسير العملي التالي للعبارة الاحتمالية $P(L_1 \leq \theta \leq L_2) \geq 1 - \alpha$. إذا أخذنا بصورة متكررة عينات عشوائية من الحجم نفسه وحسبنا من كل عينة القيمتين الملحوظتين l_1 و l_2 للإحصاءين L_1 و L_2 ، على الترتيب، فإن نسبة $(1 - \alpha)$ على الأقل من الفترات المحسوبة $[l_1, l_2]$ ستتضمن بين جدرانيها القيمة الحقيقية θ ، وسوف لا تغطي، أو لا تشكل تغطية، للقيمة الحقيقة θ بنسبة α على الأكثر.

وإذا أخذنا عينة بالذات وحسبنا الفترة المتأتية منها $[l_1, l_2]$ فإن هذه الفترة إما أنها غطّت قيمة θ الحقيقية أو أنها قصّرت في ذلك، واحتمال التغطية هو إما واحد أو صفر. وليس هناك بالمعنى الاحتمالي أية احتمالات نتحدث عنها فإما أن الفترة التي قادت إليها هذه العينة نجحت في تغطية θ أو أنها فشلت. ولكننا صممنا طرفي الفترة بحيث كان احتمال أن تتمخض العينة التي سنحصل عليها عن فترة تغطي θ هو احتمال عال لا يقل عن $(1-\alpha)$، مما يسمح لنا، منطقيا، القول إننا بدرجة عالية من الاطمئنان، مطمئنون إلى أن الفترة (l_1, l_2) قد غطّت θ بالفعل، واللّه أعلم. وقد جرت العادة على تبنّي ما كان احتمالا قبل أخذ العينة، وهو المقدار $1 - \alpha$ ، وتسميته «**معامل ثقة**» بعد أخذ العينة، وبذلك نقول إن درجة الطمأنينة لدينا بأن هذه العينة بالذات قد أدت إلى فترة تغطي θ لا تقل عن $1 - \alpha$ ، أو معبرا عنها كنسبة مئوية، لا تقل عن $100(1 - \alpha)\%$.

ويمكن تعميم هذه الأفكار إلى حالة متجه من المعالم $\underline{\theta}$ يتضمن مركبتين أو ثلاث مركبات أو أكثر. وفي هذه الحالة يمكن إيجاد منطقة ثقة R وهي منطقة من فضاء له من الأبعاد عدد ما يوجد من المركبات في المتجه $\underline{\theta}$، وبحيث تغطي هذه المنطقة بصورة متواقتة (أي في الوقت نفسه) جميع مركبات المتجه $\underline{\theta}$.

تعـــريف (٢)

لنفترض أن لدينا عينة عشوائية من توزيع متجه عشوائي $\underline{X}$ ($\underline{X}$ يمكن أن يكون 1×1) وأن هذا التوزيع يعتمد على متجه $\underline{\theta}$ من المعالم. إذا كانت R منطقة من فضاء المعالم تعتمد حدودها بشكل ما على قيم العينة وبحيث يكون:

$$P(\underline{\theta} \in R) \geq 1 - \alpha \qquad (٢)$$

مهما تكن قيم $\underline{\theta}$، فعندئذ تسمى R، $100(1 - \alpha)\%$ منطقة ثقة للمتجه $\underline{\theta}$.

(٥-٢) بعض الأمثلة التطبيقية الشائعة

سنقدم في هذه الفقرة بعضا من الأمثلة واسعة الاستخدام في التطبيق العملي ونعتمد في الوصول إلى «**مجموعة ثقة**» (فترة في حالة معلمة واحدة ومنطقة في حالة أكثر من معلمة) على ما يسمى «**كمية محورية**». فلنفترض أنه توافرت لدينا دالة في إحصاء وفي المعلمة المجهولة التي نريد وضع فترة ثقة لها، وأن توزيع هذه الدالة مستقل عن المعلمة إياها، فيمكن عندئذ وضع عبارة احتمالية نطوّرها بسهولة إلى فترة ثقة. لنبدأ أولا بوضع فترة ثقة لمتوسط توزيع طبيعي.

نظرية (١)

لتكن X_1، ...، X_n عينة عشوائية من توزيع طبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ متوسطه μ وتباينه σ^2 مجهولان، فعندئذ تشكل الفترة $[L_1, L_2]$ حيث:

$$L_2 = \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \quad \text{و} \quad L_1 = \overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \qquad (٣)$$

$100(1 - \alpha)\%$ فترة ثقة للمتوسط μ. [$t_{\alpha/2}(n-1)$ هو المئين $100\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ للتوزيع t بعدد $n-1$ درجة من الحرية].

بـــرهان

الكميـــة المحوريـــة هنـــا هـــي $(\overline{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ وهـــي دالـــة في الإحصـــاءين $\overline{X}$ و S والمعلمة μ، وكما نعلم فإن توزيعها الاحتمالي هو التوزيع t بعدد $n-1$ من درجات الحرية وهذا التوزيع مستقل عن μ. ومن تناظر هذا التوزيع حول الصفر يكون $t_{1-\alpha/2}(n-1) = -t_{\alpha/2}(n-1)$، ويمكننا كتابة العبارة الاحتمالية:

$$P\left[-t_{\alpha/2}(n-1) \leq \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2}(n-1)\right] = 1 - \alpha$$

وهذه العبارة مكافئة للعبارة:

$$P\left[(\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)S/\sqrt{n} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)S/\sqrt{n}\right] = 1 - \alpha$$

وهو المطلوب.

وتلقي هذه النتيجة المدهشة الضوء على أهمية التوزيع t. ففي توزيع طبيعي لا نعلم متوسطه ولا تباينه يمكن القيام باستقراء جيد حول المتوسط μ. ونلاحظ أن طول فترة الثقة هو:

$$L_2 - L_1 = 2\,t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$$

وبما أن توقع S معروف:

$$E[S] = \frac{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{n-1}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sigma \qquad (٤)$$

فتوقع طول الفترة هو:

$$E(L_2 - L_1) = 2\frac{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{n(n-1)}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} t_{\alpha/2}(n-1)\sigma \qquad (٥)$$

وهكذا يكون توقع الطول مقسوما على σ، أي توقع الطول مقاسا بوحدة قياس هي الانحراف المعياري هو دالة في حجم العينة n فقط، وإذا أمكن وضع قيمة تخمينية لِ σ فيمكن تحديد حجم العينة n الذي يجعل طول فترة الثقة أصغر ما يمكن.

مـــــثال (١)

لتكن X_1، ...، X_n عينة من توزيع طبيعي $N(\mu_1, \sigma^2)$، ولتكن Y_1، ...، Y_m عينة مستقلة عن الأولى مأخوذة من توزيع طبيعي $N(\mu_2, \sigma^2)$. (لاحظ أن التباين σ^2 هو نفسه في التوزيعين) فيمكن تطبيق النظرية السابقة لوضع فترة ثقة للفرق بين المتوسطين μ_1-μ_2. من المعروف أن $\bar{X} - \bar{Y}$ يتبع التوزيع الطبيعي $N\left[\mu_1 - \mu_2, \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\right]$. ونستخدم كتقدير مفضّل للتباين المشترك σ^2 تقديرا محسوبا من العينتين المستقلتين، S_p^2، نطلق عليه مصطلح التقدير الضامّ، لأنه يضم المعلومات حول σ^2 من العينتين، وهو تقدير غير منحاز، ومبني على $n + m$-2 درجة من الحرية، ومعطى بالعلاقة:

$$S_p^2 = \frac{1}{n+m-2}\left[\sum_1^n (X_i - \bar{X})^2 + \sum_1^m (Y_i - \bar{Y})^2\right]$$

وبما أن $(n+m-2)S_p^2/\sigma^2$ يتبع التوزيع χ^2 بعدد $n + m$-2 درجة من الحرية فيكون توزيع الكمية المحورية:

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

هو التوزيع t بعدد $n + m$-2 درجة من الحرية. ويمكن كتابة:

$$P\left[(\bar{X}-\bar{Y})-t_{\alpha/2}(n+m-2)S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\le\mu_1-\mu_2\le(\bar{X}-\bar{Y})+\right.$$
$$\left.t_{\alpha/2}(n+m-2)S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right]=1-\alpha$$

وهكذا تشكل الفترة $(\bar{X}-\bar{Y})\pm t_{\alpha/2}(n+m-2)S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}$ ، $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة للفرق $\mu_1-\mu_2$ ، وإذا لم تتضمن هذه الفترة الصفر فهناك ما يدعو إلى الظنّ بأن $\mu_1 > \mu_2$ أو $\mu_1 < \mu_2$.

نظـــرية (٢)

لتكن X_1 ، ... ، X_n عينة عشوائية من توزيع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ فعندئذ يشكل الحدّان :

$$L_1=\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-(\alpha/2)}(n-1)} \quad \text{و} \quad L_2=\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \qquad (٦)$$

(L_1, L_2) $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة للتباين σ^2 ، حيث يرمز $\chi^2_c(n-1)$ للمئين $100c$ للتوزيع χ^2 بـ $n-1$ درجة من الحرية وS^2 تباين العينة.

برهـــان

المقدار $(n-1)\ S^2 / \sigma^2$ هو كمية محورية تفضي إلى فترة الثقة المطلوبة للتباين σ^2 ، فهي دالة في الإحصاء S^2 والمعلمة σ^2 وتوزيعها كما نعلم هو التوزيع χ^2 بعدد $n - 1$ درجة من الحرية ، وهو توزيع مستقل عن σ^2. وهذا يسمح بكتابة العبارة الاحتمالية التالية :

$$P\left[\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\le\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\le\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right]=1-\alpha$$

أو :

$$P\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right] = 1-\alpha$$

وهو المطلوب.

ونلاحظ هنا أن طول فترة الثقة للتباين σ^2 هو $(n-1)S^2\left[\frac{1}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} - \frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right]$ وتوقع هذا الطول $(n-1)\sigma^2\left[\frac{1}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} - \frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right]$ وهو مستقل عن المتوسط μ.

نظــرية (٣)

لتكن $X_1, \dots, X_n$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و $Y_1, \dots, Y_m$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ مستقلة عن العينة الأولى، فعندئذ يشكل الحدّان.

$$L_1 = \frac{S_2^2}{S_1^2} F_{\alpha/2}(n-1, m-1) \text{ و } L_2 = \frac{S_2^2}{S_1^2} F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1) \qquad (٧)$$

$100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة (L_1, L_2) لنسبة التباينين $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ ، حيث S_1^2 تباين العينة الأولى و S_2^2 تباين العينة الثانية ويرمز $F_c(a, b)$ للمئين 100c للتوزيع F بعددين a و b من درجات الحرية.

برهــان

المقدار $\frac{S_1^2}{S_2^2} \times \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ هو كمية محورية لأنه دالة في الإحصاءين S_1^2 و S_2^2 وفي نسبة التباينين $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ ، وتوزيع هذه الكمية المحورية هو، كما نعلم، التوزيع $F(n-1, m-1)$ وعبارة هذا التوزيع لا تضمن النسبة $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ ، مما يسمح بكتابة العبارة الاحتمالية التالية:

$$P\left[F_{\alpha/n}(n-1, m-1) \le \frac{S_1^2}{S_2^2} \times \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \le F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1)\right] = 1-\alpha$$

أو :

$$P\left[\frac{S_2^2}{S_1^2}F_{\alpha/2}(n-1,m-1)\leq\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\leq\frac{S_2^2}{S_1^2}F_{1-\alpha/2}(n-1,m-1)\right]=1-\alpha$$

وهو المطلوب.

نظـــرية (٤)

لتكن X_1، ...، X_n عينة عشوائية من التوزيع الأسي $f(x;\ \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}\ ,\ x > 0$ ، فعندئذ يشكل الحدان :

$$L_1 = \chi^2_{\alpha/2}(2n)\ /\ 2n\bar{X} \quad \text{و} \quad L_2 = \chi^2_{1-\alpha/2}(2n)\ /\ 2n\bar{X} \qquad (٨)$$

$100(1 - \alpha)\%$ فترة ثقة (L_1, L_2) للمعلمة λ.

برهـــان

نعلم أن الدالة المولدة للعزوم للتوزيع الأسي المذكور هي $M_X(t)=\frac{\lambda}{\lambda-t}$ ، وأن الدالة المولدة للعزوم للمتغير $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i=n\bar{X}$ هي :

$$M_Y(t)=M_{\sum X_i}(t)=\left[M_{X_i}(t)\right]^n=\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$$

وهي الدالة المولدة للعزوم للتوزيع جاما بمعلمتين n وλ، أي $\Gamma(n;\ \lambda)$. وهكذا تكون دالة كثافة المتغير Y هي :

$$g(y;n,\lambda)=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}y^{n-1}e^{-\lambda y},\ y>0$$

وبإجراء التحويل $z = 2\ \lambda y$، وكتابة $\nu = 2n$ نجد أن دالة كثافة المتغير $(z = 2\ \lambda y)$ هي :

$$h(z;\nu)=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}\nu}\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu\right)}z^{\frac{1}{2}\nu-1}e^{-\frac{1}{2}z}\ ,\ z>0$$

والكمية $Z = 2\lambda n\overline{X}$ كمية محورية فهي دالة في الإحصاء $\overline{X}$ والمعلمة λ وتوزيعها، كما نرى من المعادلة الأخيرة هو التوزيع χ^2 (مربع كاي) بعدد من درجات الحرية $\nu = 2n$ ، وهو توزيع مستقل عن λ. وهذا يسمح بكتابة العبارة الاحتمالية:

$$P\left[\chi^2_{\alpha/2}(2n) \le 2n\lambda\, \overline{X} \le \chi^2_{1-\alpha/2}(2n)\right] = 1-\alpha$$

أو:

$$P\left[\frac{\chi^2_{\alpha/2}(2n)}{2n\overline{X}} \le \lambda \le \frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)}{2n\overline{X}}\right] = 1-\alpha$$

وهو المطلوب.

مـــــثال (٢)

للنظرية السابقة تطبيق مهم في مجال الموثوقية. فلنفرض أن X عمر قطعة الكترونية أو جهاز يتبع التوزيع الأسي بمعلمة λ ، فعندئذ تكون موثوقية القطعة أو الجهاز في زمن t معرّفة بالمقدار:

$$R(t) = P(X > t) = 1 - F_X(t) = e^{-\lambda t}$$

وبملاحظة أن $L_1 \le \lambda \le L_2$ يكافئ:

$$e^{-L_2 t} \le e^{-\lambda t} = R(t) \le e^{-L_1 t}$$

فإن $\left(e^{-L_2 t}, e^{-L_1 t}\right)$ تشكل $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة للموثوقية $R(t)$، حيث $(L_1,\ L_2)$ هي $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة للمعلمة λ كما تعطيها النظرية السابقة. من الواضح أن $L_1 = 0$ هنا، بصورة عامة، وبالتالي فإن المطلوب هو فترة ثقة وحيدة الجانب للموثوقية $R(t)$، أي:

$$e^{-L_2 t} \le e^{-\lambda t} = R(t) \le 1$$

(٥-٣) مناطق الثقة لمتوسط وتباين توزيع طبيعي

لنفترض أننا نريد وضع عبارة ثقة حول μ وσ^2 في الوقت نفسه بمعامل ثقة يساوي $100(1 - \alpha)\%$، أي نريد إقامة منطقة ثقة للمعلمتين μ وσ^2 معا. فيمكننا إتباع إحدى الطرق الثلاث التالية:

١ - لتكن الحادثة A هي الحادثة:

$$\left(\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

والحادثة B هي الحادثة:

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}\right)$$

فقد رأينا في الفقرات السابقة أن $P(A) = 1 - \alpha$ و $P(B) = 1 - \alpha$، وما نريده في الواقع هو $P(AB)$ أي احتمال تحقق A وB في الوقت نفسه، وإذا كانت A وB مستقلتين فإن:

$$P(AB) = P(A)\, P(B) = (1 - \alpha)^2$$

وإذا كنا نرغب بمنطقة ثقة معاملها 95% نأخذ $(1 - \alpha)^2 = 0.95$ أو $\alpha = 0.02532$.

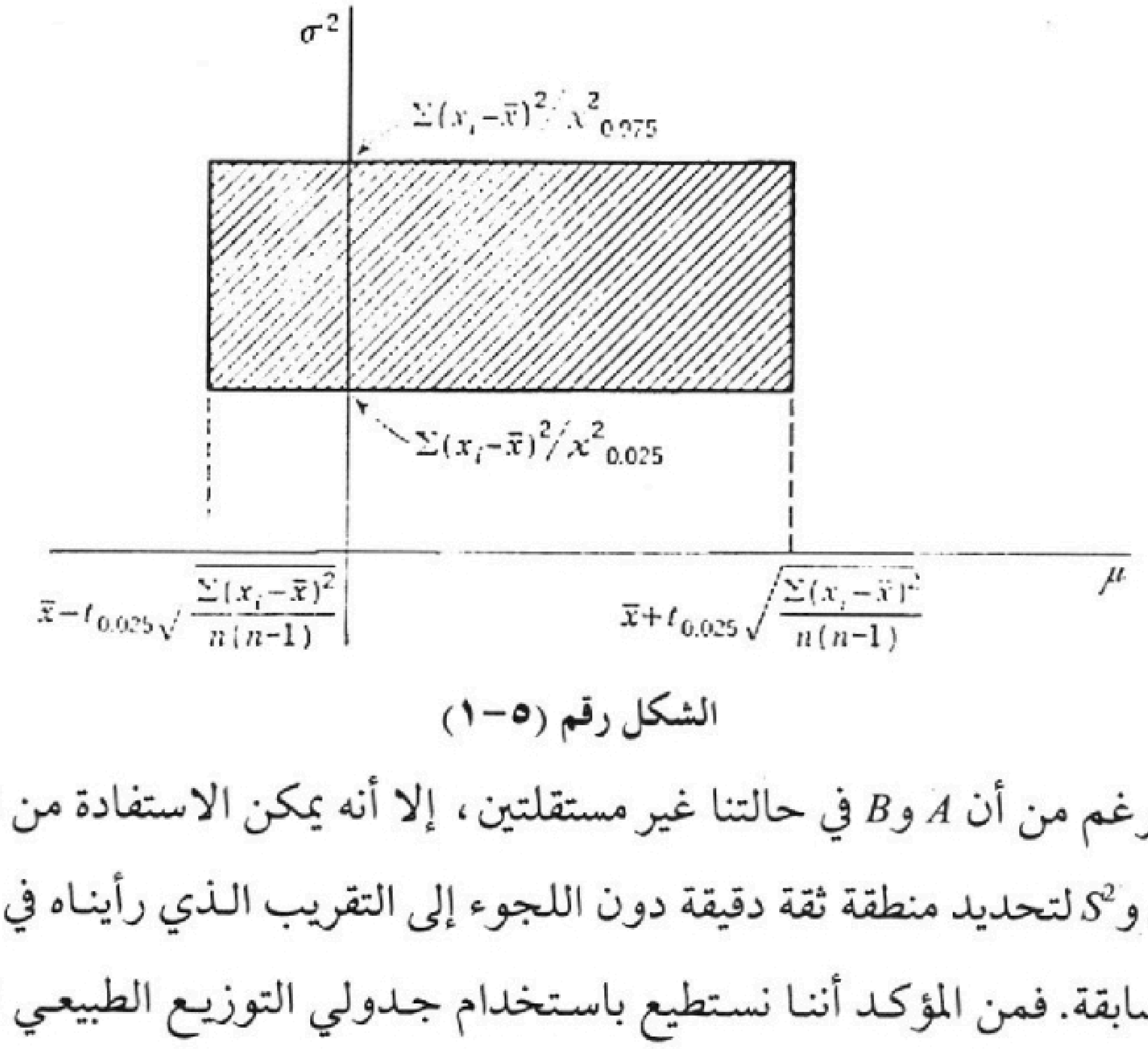
ويمكن تطبيق مثل هذه الفكرة في ضم فترتي ثقة من هذا النوع مأخوذين من تجربتين مستقلتين في عبارة ثقة واحدة تشمل μ و σ^2 في آن واحد معا. أما في حالتنا فإنه من الواضح أن A و B غير مستقلتين لأن S^2 موجودة في كلي الحادثتين أو بعبارة أدق لأن t وx^2 توزيعان غير مستقلين فالتوزيع t كما نعلم دالة في x.

٢ - إذا لم نطمح إلى تحديد دقيق لمنطقة الثقة واكتفينا بمنطقة ثقة تتصف بأنها محافظة بعض الشيء فيمكننا أن نكتب:

$$P(AB) = 1 - P(\overline{AB}) = 1 - P(\overline{A} + \overline{B}) = 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) + P(\overline{A}.\overline{B})$$

$$\geq 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) = 1 - \alpha - \alpha = 1 - 2\alpha$$

وإذا أردنا أن يكون معامل منطقة الثقة 95% على الأقل فمن المعقول أن نختار α بحيث يكون $1\text{-}2\alpha = 0.95$ أو $\alpha = 0.025$. والمنطقة البسيطة الناتجة في هذه الحالة كما هي مبينة في الشكل رقم (٥-١) جانبا ستكون مساحتها أكبر مما هو ضروري لمنطقة الثقة المطلوبة والتي يجري تحديدها بدقة.



الشكل رقم (٥-١)

٣ - بالرغم من أن A وB في حالتنا غير مستقلتين، إلا أنه يمكن الاستفادة من استقلال $\overline{X}$ وS^2 لتحديد منطقة ثقة دقيقة دون اللجوء إلى التقريب الذي رأيناه في الطريقة السابقة. فمن المؤكد أننا نستطيع باستخدام جدولي التوزيع الطبيعي المعياري ومربع كاي χ^2 إيجاد ثلاثة أعداد a ، b و c بحيث يكون:

$$P\left[-a < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < +a\right] = 1 - \alpha, \quad (a = z_{1-\frac{\alpha}{2}})$$

أو

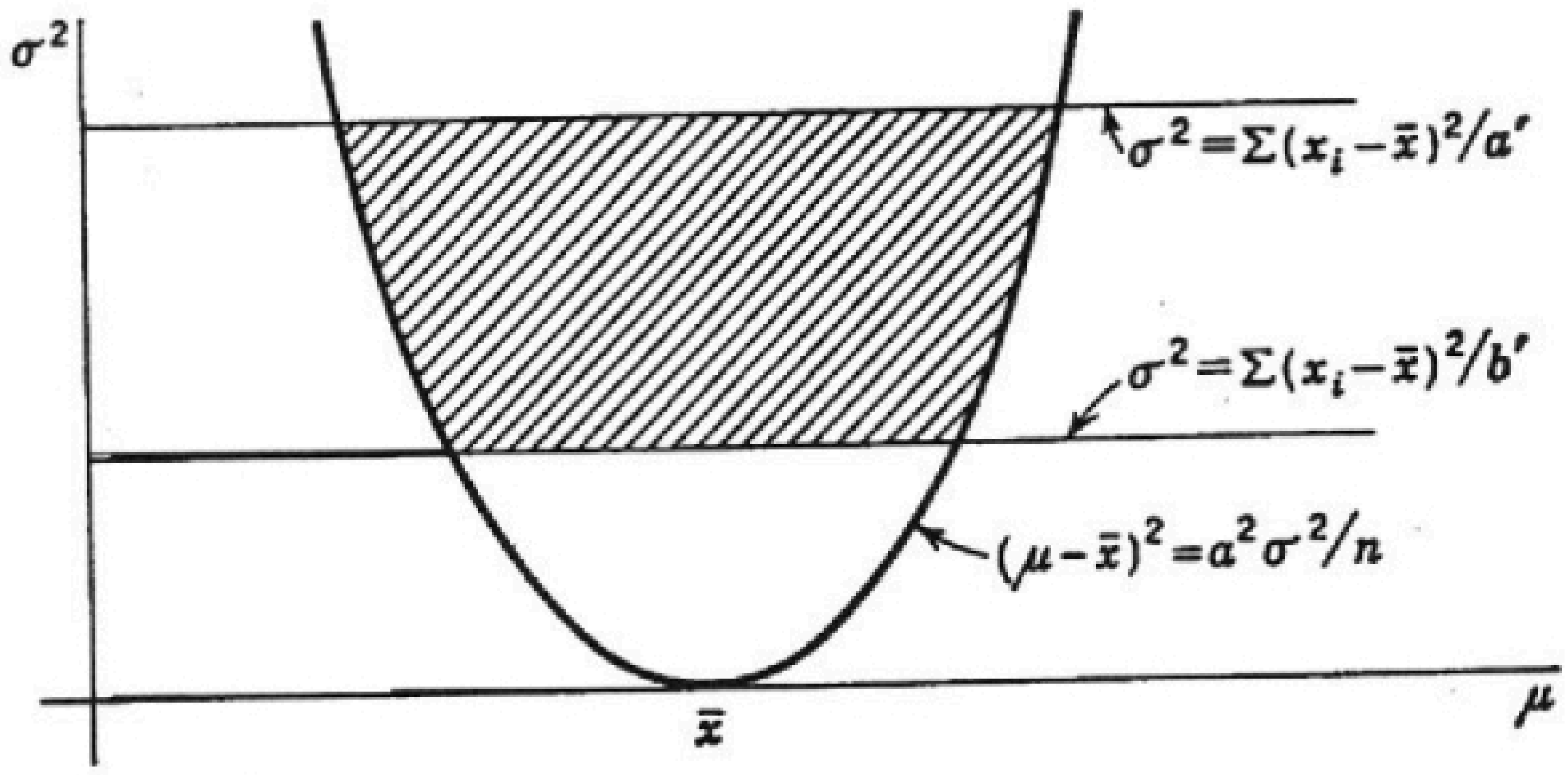
$$P\left[b \leq \frac{\Sigma(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \leq c\right] = 1 - \alpha,$$

$c = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}, b = \chi^2_{\alpha/2}$ مثلا).

وبما أن $\overline{X}$ و $\Sigma(X_i - \overline{X})^2$ مستقلتان نكتب:

$$P\left[-a \leq \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq a\,,\, b \leq \frac{\Sigma(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2} \leq c\right] = (1-\alpha)^2$$

ونحصل على 100% $.(1\text{-}\alpha)^2$ منطقة ثقة برسم المنطقة R التي تحدده المتراجحات الأربع في المستوى (μ, σ^2)، والمبينة في الشكل رقم (٥-٢).



الشكل رقم (٥-٢).

ولدينا على وجه التحديد قطع مكافئ معطى بالعلاقة:

$$\sigma^2 = \frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{a^2} \quad \text{أو} \quad \frac{(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2/n} = a^2 \qquad (٩)$$

والمستقيمان:

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(X_i-\overline{X})^2}{b} = \text{ثابت}$$
$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(X_i-\overline{X})^2}{c} = \text{ثابت} \qquad (١٠)$$

وفي حالة 95% منطقة ثقة R فإن $\alpha = 0.2532$.

(٥-٤) طريقة عامة للحصول على فترات ثقة

يمكننا في حالة عدم توافر كمية محورية اللجوء إلى طريقة عامة للحصول على فترة ثقة بالنسبة لمعلمة θ في دالة الكثافة $f(x,\theta)$. فليكن $\hat{\theta}$ تقديرا نقطيا لهذه المعلمة، وليكن $g(\hat{\theta},\theta)$ دالة الكثافة من أجل $\hat{\theta}$، وتصبح دالة معرفة تماما عند تحديد قيمة معينة للمعلمة θ، فنتمكن عندها من كتابة عبارات احتمالية حول $\hat{\theta}$. لنتصور أن $\theta=\theta_0$، فيمكننا عندها إيجاد عددين h_1 و h_2 بحيث يكون:

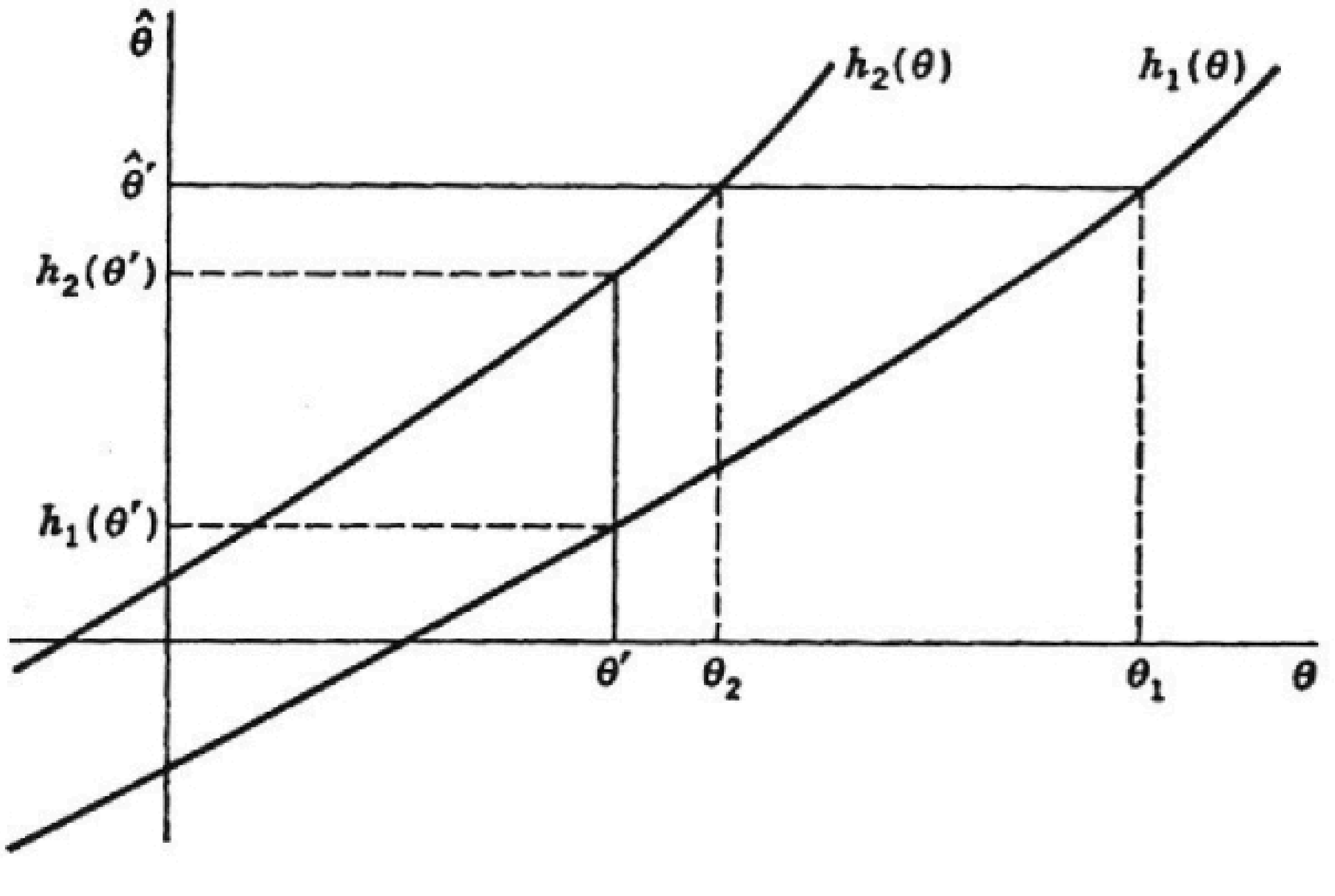
$$P\left(\hat{\theta}\le h_1 \mid \theta=\theta_0\right)=\int_{-\infty}^{h_1} g(\hat{\theta},\theta_0)\,d\hat{\theta}=0.025 \qquad (١١)$$

$$P\left(\hat{\theta}\ge h_2 \mid \theta=\theta_0\right)=\int_{h_2}^{\infty} g(\hat{\theta},\theta_0)\,d\hat{\theta}=0.025 \qquad (١٢)$$

هذا على أساس أننا نريد 95% فترة ثقة على وجه التحديد وبالتالي يمكن أن نكتب:

$$P\left[h_1\le\hat{\theta}\le h_2 \mid \theta=\theta_0\right]=0.95$$

وبالطبع سيتوقف العددان h_1 و h_2 على القيمة θ_0 التي افترضتها θ، وبالتالي فإن h_1 و h_2 هما بصورة عامة دالتان في θ، مثلا $h_1(\theta)$ و $h_2(\theta)$. وتتحدد قيم هاتين الدالتين عند أي قيمة لـ θ من خلال العلاقتين (١١) و (١٢) ويمكن رسمهما في المستوى $(\theta,\hat{\theta})$. [انظر الشكل رقم (٥-٣)].



الشكل رقم (٥-٣).

وإذا أقمنا الآن خطا رأسيا من أية نقطة θ' على المحور θ فإنه سيقطع المنحنيين في نقطتين يمثل مسقطاهما على المحور $\hat{\theta}$ حدين تقع بينهما $\hat{\theta}$ باحتمال 0.95.

وهكذا يمكننا بعد رسم المنحنيين $\hat{\theta}=h_1(\theta)$ و $\hat{\theta}=h_2(\theta)$ إقامة فترة ثقة للمعلمة θ وذلك كما يلي:

لنحسب من عينة عشوائية حجمها n التقدير $\hat{\theta}$ ولتكن قيمته $\hat{\theta}'$ مثلا، فسيقطع الخط الأفقي الذي نرسمه من النقطة $\hat{\theta}'$ على المحور $\hat{\theta}$، المنحنيين h_1 وh_2 في نقطتين مسقطاهما على المحور θ هما θ_1 و θ_2، كما في الشكل رقم(٥-٣). ويحدد هذان العددان فترة ثقة لـθ. فلنفرض أننا نأخذ العينة من مجتمع فيه $\theta'=\theta$. فاحتمال أن تقع $\hat{\theta}'$ بين $h_1(\theta')$ و $h_2(\theta')$ هو 95%. وإذا وقع التقدير فعلا بين هاتين القيمتين فسيقطع الخط الأفقي الخط الرأسي المقام من النقطة θ' في نقطة تقع بين المنحنيين وستغطي الفترة الموافقة (θ_1, θ_2) القيمة θ'. أما إذا لم يقع التقدير بين $h_1(\theta')$ و$h_2(\theta')$ فسوف لا يتقاطع الخطان الأفقي والرأسي في نقطة بين المنحنيين وبالتالي سوف لا تغطي الفترة الموافقة (θ_1, θ_2) القيمة θ'. وهذا يعني أن احتمال أن تغطي الفترة (θ_1,θ_2) المقامة بهذه الطريقة القيمة θ' هو 0.95 تماما. وتبقى هذه العبارة صحيحة من أجل أي قيمة للمعلمة θ.

وليس من الضروري أحيانا رسم h_1 و h_2 لتحديد فترة الثقة (θ_1,θ_2) من أجل قيمة معينة للتقدير. فبالعودة إلى الشكل رقم (٥-٣) نجد أن حدي θ هما نقطتان θ_1 وθ_2 بحيث يكون $h_1(\theta_1)=\hat{\theta}'$ و $h_2(\theta_2)=\hat{\theta}'$. وإذا تذكرنا تعريف كل من h_1 و h_2 فيمكن القول إن θ_1 هي قيمة لـθ تحقق العلاقة:

$$\int_{-\infty}^{\hat{\theta}'} g(\hat{\theta},\theta)\, d\hat{\theta} = 0.025 \qquad (١٣)$$

وθ_2 هي قيمة لـ θ تحقق العلاقة:

$$\int_{\hat{\theta}'}^{\infty} g(\hat{\theta};\theta)\, d\hat{\theta} = 0.025 \qquad (١٤)$$

وإذا أمكن وضع الطرف الأيسر في كل من هاتين المعادلتين على شكل عبارة ظاهرة في θ ، وأمكن إيجاد حل وحيد للمعادلتين من أجل θ فإن الجذرين اللذين نحصل عليهما يمثلان 95% فترة ثقة للمعلمة θ.

وإذا لم يكن المنحنيان $h_1(\theta)$ و $h_2(\theta)$ وحيدي الطور في θ فمن الممكن أن تصبح فترة الثقة مجموعة من الفترات. فلو فرضنا أن الخط الأفقي المقام من $\hat{\theta}'$ في الشكل رقم (٥-٣). يقطع المنحنيين في النقطتين θ_3 و θ_4 أيضا ، فستصبح فترة الثقة عبارة عن فترتين هما (θ_1 , θ_2) و (θ_3 , θ_4) وستصبح العبارة حول θ من الشكل :

$$P(\theta_3 < \theta < \theta_4 \;\; , \;\; \theta_1 < \theta < \theta_2) = 0.95$$

وفي معظم الحالات التي نواجهها عمليا سنجد فترة واحدة ، وأحيانا يمكننا أن نختار من بين هذه الفترات إحداها فقط ونعتمدها كفترة ثقة مستفيدين من دلالات إضافية تقدمها طبيعة التجربة.

ويمكن تعميم هذه الطريقة العامة إلى حالات تحوي أكثر من معلمة واحدة. إلا أن التمثيل الهندسي يصبح غير ممكن. ولا يمكن استخدام هذه الطريقة لحساب فترة ثقة حول جزء من مجموعة المعالم فقط.

وليس لدينا حتى الآن طريقة عامة لإقامة فترات ثقة حول جزء من مجموعة k معلمة في دالة توزيع احتمالي ، وذلك باستثناء حالات العينات ذات الحجم الكبير.

مـــــثال (٣)

كيف يمكن تطبيق الطريقة العامة للحصول على 95% فترة ثقة حول μ متوسط مجتمع طبيعي تباينه معروف ويساوي σ_0^2 .

علينا إيجاد دالتين $h_1(\mu)$ و $h_2(\mu)$ بحيث يكون :

$$P\left(\overline{X} \le h_1(\mu) \,|\, \mu\right) = 0.025$$

$$P\left(\overline{X} \ge h_2(\mu) \,|\, \mu\right) = 0.025$$

ونعلم أن :

$$P\left(\overline{X} \leq \mu - 1.96\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}) \mid \mu\right) = 0.025$$

$$P\left(\overline{X} \geq \mu + 1.96\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}) \mid \mu\right) = 0.025$$

إذن :

$$h_1(\mu) = \mu - 1.96.\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

$$h_2(\mu) = \mu + 1.96.\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

ولدينا :

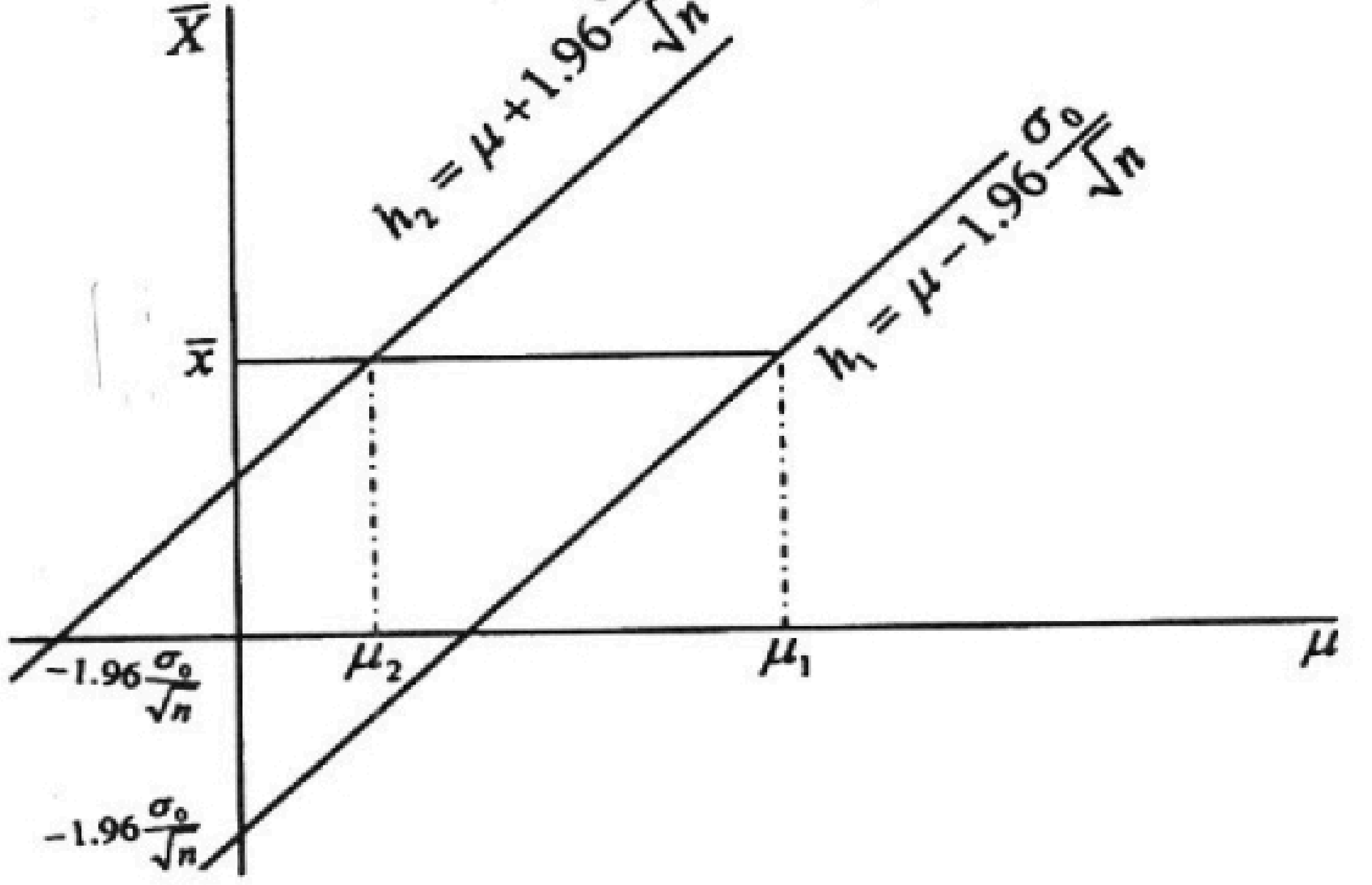
$$P\,[\,\mu_2 \leq \mu \leq \mu_1] = 0\,.95$$

حيث μ_2 هي قيمة μ التي يكون من أجلها $h_2(\mu) = \overline{X}$ وهذا يعني أن $\mu_2 = \overline{X} - 1.96\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$

وμ_1 هي قيمة μ التي يكون من أجلها $h_1(\mu) = \overline{X}$ أي أن $\mu_1 = \overline{X} + 1.96\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$ وهذا يعني أن :

$$P\left[\overline{X} - 1.96\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + 1.96\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right] = 0.95$$

وهي الفترة المطلوبة [انظر الشكل (٥-٤)].



الشكل رقم (٥-٤).

(٥-٥) فترات الثقة للتوزيع الثنائي

لتكن X_1، . . . ، X_n عينة عشوائية من توزيع بيرنوللي :

$$f(x, p) = p^x(1-p)^{1-x} \quad , \quad x = 0, 1 \quad ; \quad 0 \leq p \leq 1$$

فيكون تقدير الإمكانية العظمى لـ p هو :

$$\hat{p} = \frac{y}{n}, \quad y = 0, 1, 2 \dots n$$

حيث $Y = \Sigma X_i$ ودالة كثافة $\hat{p}$ هي :

$$g(\hat{p}, p) = \binom{n}{n\hat{p}} p^{n\hat{p}}(1-p)^{n(1-\hat{p})}, \quad \hat{p} = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1$$

ولا توجد هنا كمية محورية أي كمية معطاة بدلالة $\hat{p}$ وp وتوزيعها مستقل عن p.

ولنفرض من أجل التحديد أن معامل الثقة هو 95%. فالخطوة الأولى في تطبيق الطريقة العامة هي إيجاد الدالتين $h_1(p)$ و$h_2(p)$. ومن أجل $p = 0.4$، مثلا ، نريد :

$$P[\hat{p} < h_1(.4)] = \sum_{y=0}^{nh_1} \binom{n}{y} (.4)^y (.6)^{n-y} = .025$$

وبما أن التوزيع هو توزيع منقطع فإن الكمية nh_1 يجب أن تكون عددا صحيحا. ومن المستحيل جعل هذا المجموع مساويا لِـ 0.025 تماما من أجل جميع قيم p. إلا أننا على الوجه الآخر لا نحتاج للمنحني $h_1(p)$ من أجل جميع قيم p ولكن فقط من أجل القيم الموافقة للقيم الممكنة للتقدير $\hat{p}$. ويمكننا استخدام الطريقة التي تعبر عنها العلاقتان (١٣) و (١٤). فإذا فرضنا أن التقدير $\hat{p} = \frac{r}{n}$ فإن الحد الأعلى p_1 لِـ 95% فترة ثقة هو قيمة p التي تحقق المعادلة :

$$\sum_{y=0}^{r} \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} = 0.025 \qquad (١٥)$$

والحد الأدنى p_2 هو قيمة p التي تحقق المعادلة :

$$\sum_{y=r}^{n} \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} = 0.025 \qquad (١٦)$$

وإذا كان $r = 0$ فإن الحد الأدنى يكون صفرا وإذا كان $r = n$ فإن الحد الأعلى يكون الواحد. ويمكن من أجل قيم صغيرة لـ n، أن نحل (١٥) و (١٦) من أجل p بطريقة التجربة والخطأ. إلا أن هذه الطريقة تصبح غير عملية من أجل قيم متزايدة لِ n، وتقدم جداول بيرسون لدالة β غير التامة طريقة بسيطة للوصول إلى p.

ومن أجل قيم لِ n أكبر مما تتضمنه هذه الجداول يمكن استخدام تقريب التوزيع الثنائي بالتوزيع الطبيعي مما سنبحثه في الفقرة التالية.

(٥–٦) فترة الثقة في حالة عينات كبيرة

رأينا في الفصل الرابع أن توزيع تقدير الإمكانية العظمى T للمعلمة θ في دالة كثافة $f(x, \theta)$، يتقارب إلى التوزيع الطبيعي $N\left(\theta, \frac{1}{nI}\right)$ حيث $I=E\left(\frac{-\partial^2 \log f}{\partial \theta^2}\right)$ و nI هو حد المعلومات وذلك تحت شروط عامة جدا. ويمكننا إذن تحت تلك الشروط أن نحصل بسهولة على فترات ثقة تقريبية لـ θ مستفيدين من التوزيع الطبيعي. أي أنه يمكننا أن نكتب من أجل عينات كبيرة بكفاية :

$$P\left[z_{\alpha/2} < (T-\theta)\sqrt{nI} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \approx 1-\alpha$$

وإذا فرضنا أن $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = d$ ، وعندئذ $z_{\frac{\alpha}{2}} = -d$ ، نجد :

$$P\left[-d < \sqrt{nI}\,(T-\theta) < d\right] \approx 1-\alpha \qquad (١٧)$$

وبإعادة ترتيب المتراجحات في (١٧) نحصل بشكل تقريبي على $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة للمعلمة θ.

مـــــثال (٤)

لنأخذ كمثال التوزيع الثنائي بمعلمة p، فنعلم أن :

$$Var(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$$

وفترة الثقة التقريبية يمكن أن تكون، بالاستفادة من تقارب التوزيع الثنائي إلى التوزيع الطبيعي ومن أجل n كبيرة بكفاية، كما يلي:

$$p\left[-d < \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} < d\right] \approx 1-\alpha$$

وبحل المتراجحة:

$$\frac{n(\hat{p}-p)^2}{p(1-p)} < d^2$$

بالنسبة لـ p يمكن أن تكتب:

$$P\ (\eta_1 < p < \eta_2) \approx 1-\alpha \qquad (١٨)$$

حيث

$$\eta_1 = \frac{2n\hat{p} + d^2 - d\sqrt{4n\hat{p} + d^2 - 4n\hat{p}^2}}{2(n+d^2)} \text{ و } \eta_2 = \frac{2n\hat{p} + d^2 + d\sqrt{4n\hat{p} + d^2 - 4n\hat{p}^2}}{2(n+d^2)}$$

ويمكن كتابة عبارة أقل دقة، إذا اعتبرنا بالإضافة إلى التقريب السابق أنه من أجل n كبيرة يمكن اعتبار $p \approx \hat{p}$ وبالتالي $Var(\hat{p}) \approx \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}$ أي أن:

$$P\left[-d < \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}} < d\right] \approx 1-\alpha$$

أو:

$$P\left[\hat{p} - d\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + d\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] \approx 1-\alpha$$

وفي حالة 95% مجال ثقة نجد:

$$P\left[\hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] \approx 0.95 \qquad (١٩)$$

(٥-٧) فترات الثقة المتعددة

لنفرض أننا سحبنا عينة عشوائية حجمها n من كل من ثلاثة مجتمعات طبيعية لها متوسطات تساوي، على الترتيب، μ_1، μ_2 و μ_3، وتباين واحد يساوي σ^2، أي لتكن العينة الأولى X_1، . . . ، X_n من المجتمع $N(\mu_1,\sigma^2)$ والعينة الثانية Y_1، . . . ، Y_n من المجتمع $N(\mu_2,\sigma^2)$ والعينة الثالثة Z_1، . . . ، Z_n من المجتمع $N(\mu_3,\sigma^2)$ ولنضع 95% فترة ثقة لكل من $(\mu_1-\mu_2)$، $(\mu_2-\mu_3)$ و $(\mu_1-\mu_3)$.

ولوضع فترة ثقة لـ $\mu_1-\mu_2$ نقول إن توزيع الكمية $(\bar{X}-\mu_1)$ هو التوزيع الطبيعي $N\left(0,\frac{\sigma^2}{n}\right)$، وتوزيع الكمية $(\bar{Y}-\mu_2)$ هو التوزيع الطبيعي $N\left(0,\frac{\sigma^2}{n}\right)$ والكميتان $(\bar{X}-\mu_1)$ و $(\bar{Y}-\mu_2)$ مستقلتان، إذن فتوزيع الكمية: $W=(\bar{X}-\mu_1)-(\bar{Y}-\mu_2)$ أو $W=(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)$ هو التوزيع الطبيعي $N\left(0,\frac{2\sigma^2}{n}\right)$، وبالتالي فإن توزيع الكمية $\frac{W}{\sqrt{2\sigma^2/n}}$ هو التوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$. لتكن S_1^2، S_2^2 و S_3^2 تباينات كل من العينات الثلاث حيث:

$$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_1^n(X_i-\bar{X})^2 \quad ، \quad S_2^2=\frac{1}{n-1}\sum_1^n(Y_i-\bar{Y})^2 \quad \text{و} \quad S_3^2=\frac{1}{n-1}\sum_{n=1}^n(Z_i-\bar{Z})^2$$

فتمثل هذه الكميات الثلاث ثلاثة تقديرات مستقلة للتباين σ^2. ويمكن الوصول إلى تباين أفضل لـ σ^2 بضم التقديرات الثلاثة على الشكل التالي:

$$S^2=\frac{S_1^2+S_2^2+S_3^2}{3}$$

وكما نعلم فإن توزيع الكمية:

$$\frac{3(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)S_1^2+(n-1)S_2^2+(n-1)S_3^2}{\sigma^2} \qquad (٢٠)$$

هو χ^2 بـ $(3n-3)$ درجة من الحرية. أما S^2 فهو مستقل عن W كما نعلم. إذن تتوزع الكمية:

$$t=\frac{W(\sigma\sqrt{n})}{\sqrt{2}S\sigma}=\frac{W\sqrt{n}}{S\sqrt{2}} \qquad (٢١)$$

وفق التوزيع t بـ $3(n-1)$ درجة من الحرية. وبالتالي :

$$P\left[-t_{.975}<\frac{W\sqrt{n}}{S\sqrt{2}}<t_{.975}\right]=0.95$$

أو :

$$P\left[-t_{.975}\sqrt{\frac{2S^2}{n}}<W<t_{.975}\sqrt{\frac{2S^2}{n}}\right]=0.95$$

أو :

$$P\left[-t_{.975}\sqrt{\frac{2S^2}{n}}<(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)<t_{.975}\sqrt{\frac{2S^2}{n}}\right]=0.95$$

ومنه نجد 95% فترة ثقة بالنسبة لِ $(\mu_1-\mu_2)$ كما يلي :

$$P\left[(\bar{X}-\bar{Y})-t_{.975}\sqrt{\frac{2S^2}{n}}<\mu_1-\mu_2<(\bar{X}-\bar{Y})+t_{.975}\sqrt{\frac{2S^2}{n}}\right]=0.95 \qquad (٢٢)$$

وبصورة مشابهة يمكننا أن نكتب فترتي ثقة بالنسبة لـ $\mu_1-\mu_3$ و $\mu_2-\mu_3$ كما يلي :

$$P\left[(\bar{X}-\bar{Z})-t_{.975}\sqrt{\frac{2S^2}{n}}<\mu_1-\mu_3<(\bar{X}-\bar{Z})+t_{.975}\sqrt{\frac{2S^2}{n}}\right]=0.95 \qquad (٢٣)$$

$$P\left[(\bar{Y}-\bar{Z})-t_{.975}\sqrt{\frac{2S^2}{n}}<\mu_2-\mu_3<(\bar{Y}-\bar{Z})+t_{.975}\sqrt{\frac{2S^2}{n}}\right]=0.95 \qquad (٢٤)$$

أي أننا إذا أعدنا سحب العينات الثلاث بصورة متكررة وحسبنا في كل مرة الفترة في (٢٢) فنتوقع أن تغطي هذه الفترة على المدى الطويل الكمية $(\mu_1-\mu_2)$ في 95% من الحالات. وهكذا بالنسبة لـ $(\mu_1-\mu_3)$ و$(\mu_2-\mu_3)$ كل على حدة. وإذا أردنا الآن الوصول إلى فترات ثقة تغطي، على الترتيب، وفي آن واحد الكميات الثلاث $(\mu_1-\mu_2)$،

$(\mu_1\text{-}\mu_3)$ و$(\mu_2\text{-}\mu_3)$ وبمعامل ثقة مشترك 95% أي وضع عبارة احتمالية تتناول الفترات المتعلقة بالكميات الثلاث معا ، فنقول إننا أمام مسألة فترات الثقة المتعددة. إن الفترات الثلاث في(٢٢) ، (٢٣) و (٢٤) ولنرمز لها بالحوادث A_1 ، A_2 ، A_3 ليست مستقلة ولذلك فإن :

$$P(A_1\, A_2\, A_3) \neq P(A_1).\, P(A_2)\ .\ P(A_3)$$

وبشكل عام يمكننا في مثل هذه الحالات الوصول إلى فترة ثقة متحفظة أي فترة ثقة لا يقل معاملها عن 95% كما يلي :

لنفرض أن لدينا k حادثة ، $A_1, A_2, ..., A_k$ فنعلم أن :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = 1 - P\sum_{i=1}^{k} \overline{A}_i = 1 - \sum_{i=1}^{k} P(\overline{A}_i) + \sum_{i<j} P(\overline{A}_i.\overline{A}_j) - ...$$
$$\geq 1 - \sum_{i=1}^{k} P(\overline{A}_i) = 1 - k\alpha$$

باعتبار $P(\overline{A}_i) = \alpha$ من أجل $i = 1,2...k$. ولكي نحصل على فترة ثقة متحفظة لا يقل معاملها عن 95% مثلا يكفي أن نأخذ :

$1\text{-}\ k\alpha = 0.95$ أو $\alpha = \dfrac{0.05}{k}$. وفي حالتنا هنا $k = 3$ فنقول أن لو أخذنا فترات الثقة لـ $(\mu_1\text{-}\mu_2)$ ، $(\mu_1\text{-}\mu_3)$ و $(\mu_2\text{-}\mu_3)$ بمعاملات تساوي $1 - \dfrac{0.05}{3}$ فسنكون متأكدين بأن احتمال تحقق الفترات الثلاث في آن واحد لا يقل عن 95%.

وللإجابة بشكل دقيق على مثل هذه الأسئلة نورد النظرية التالية ثم نشرح تطبيقها الذي يوفر لنا طريقة لحل مسألة فترات الثقة المتعددة بشكل دقيق.

نظـــرية (١)

لتكن V_1 ، V_2 ، . . . ، V_k عينة عشوائية حجمها n من المجتمع الطبيعي $N(0, \sigma^2)$. وليكن R مدى العينة أي $R = max\ V_i - min\ V_i$ لتكن الكمية $\dfrac{\nu S^2}{\sigma^2}$ المستقلة عن V_i والتي تتوزع وفق χ^2 بـ ν درجة من الحرية. عندئذ يتوزع المتغير العشوائي :

$$q = \frac{R}{S}$$

وفق توزيع المدى المنسوب إلى t بـ k درجة من الحرية في البسط و v درجة من الحرية في المقام. إن عبارة هذا التوزيع معقدة إلا أن الكميات q_α حيث $P(q < q_\alpha) = 1 - \alpha$ محسوبة في جداول من أجل قيم مختلفة لـ k و v وحيث $\alpha = 0.01$ ، $\alpha = 0.05$ و $\alpha = 0.10$.

ولإيضاح كيفية الاستفادة من هذه النظرية في فترات الثقة المتعددة سنفترض أن معامل الثقة المطلوب 95% وأن لدينا حالة تجربة إحصائية تحوي ثلاث عينات كما ذكرنا في مطلع هذه الفقرة. لتكن :

$$V_1 = (\bar{X} - \mu_1)\sqrt{n} \text{ ، } V_2 = (\bar{Y} - \mu_2)\sqrt{n} \text{ و } V_3 = (\bar{Z} - \mu_3)\sqrt{n}$$

وبما أن V_i متغيرات يتوزع كل منها وفق التوزيع الطبيعي $N(0,\sigma^2)$ وأن الكمية $\frac{3(n-1)S^2}{\sigma^2}$ مستقلة عن V_i وتتوزع وفق χ^2 بـ $3(n-1)$ درجة من الحرية فيمكن تطبيق النظرية السابقة فنقول أن :

$$q = \frac{R}{S} = \frac{\max V_i - \min V_i}{S}$$

يتوزع وفق توزيع المدى المنسوب إلى t بـ $(k = 3)$ درجات من الحرية في البسط و $v = 3(n-1)$ درجة من الحرية في المقام. إذن :

$$1 - \alpha = P(q < q_\alpha) = P\left(\frac{\max V_i - \min V_i}{S} < q_\alpha\right)$$

$$= P(\max V_i - \min V_i < S.q_\alpha) \qquad (٢٥)$$

ولكن عندما يكون $[\max V_i - \min V_i < S.q_\alpha]$ ، فإن المتراجحات الثلاث التالية تكون محققة في آن واحد :

$$\left|(\bar{X} - \mu_1) - (\bar{Y} - \mu_2)\right| < \frac{Sq_\alpha}{\sqrt{n}}$$

$$\left|(\bar{X} - \mu_1) - (\bar{Z} - \mu_3)\right| < \frac{Sq_\alpha}{\sqrt{n}}$$

$$\left|(\bar{Y} - \mu_2) - (\bar{Z} - \mu_3)\right| < \frac{Sq_\alpha}{\sqrt{n}}$$

وهذا يعني أن :

$$-\frac{Sq_\alpha}{\sqrt{n}} < (\bar{X}-\bar{Y}) - (\mu_1-\mu_2) < \frac{Sq_\alpha}{\sqrt{n}}$$
$$-\frac{Sq_\alpha}{\sqrt{n}} < (\bar{X}-\bar{Z}) - (\mu_1-\mu_3) < \frac{Sq_\alpha}{\sqrt{n}} \qquad (٢٦)$$
$$-\frac{Sq_\alpha}{\sqrt{n}} < (\bar{Y}-\bar{Z}) - (\mu_2-\mu_3) < \frac{Sq_\alpha}{\sqrt{n}}$$

ومن (٢٥) و (٢٦) يمكننا القول إن احتمال أن تكون المتراجحات الثلاث التالية محققة في آن واحد هو $1 - \alpha$:

$$(\bar{X}-\bar{Y}) - \frac{Sq_\alpha}{\sqrt{n}} < \mu_1-\mu_2 < (\bar{X}-\bar{Y}) + \frac{Sq_\alpha}{\sqrt{n}}$$
$$(\bar{X}-\bar{Z}) - \frac{Sq_\alpha}{\sqrt{n}} < \mu_1-\mu_3 < (\bar{X}-\bar{Z}) + \frac{Sq_\alpha}{\sqrt{n}} \qquad (٢٧)$$
$$(\bar{Y}-\bar{Z}) - \frac{Sq_\alpha}{\sqrt{n}} < \mu_2-\mu_3 < (\bar{Y}-\bar{Z}) + \frac{Sq_\alpha}{\sqrt{n}}$$

ويمكن إعادة العمل نفسه من أجل t مجتمعا بدلا من ثلاثة مجتمعات وفي هذه الحالة تتغير فقط درجات الحرية المتعلقة بـ q_α من جهة ويصبح لدينا $\frac{1}{2}t(t-1)$ متراجحة من نوع المتراجحات في (٢٦).

مـــــثال (٥)

لنفرض أن مجربا يريد مقارنة ثلاث سلالات من القمح باستنبات كل منها في 6 قطع من الأرض. وأن نتائج التجربة أعطت ما يلي :

$\bar{X} = 28.2$ ، $\bar{Y} = 26.1$ ، $\bar{Z} = 30.8$ و $S^2 = 3.84$

حيث $n = 6$ ، $k = 3$ و $v = 3(n-1) = 15$

وللحصول على فترات ثقة لـ μ_i-μ_j بمعامل ثقة مشترك 95% نحسب :

$$Sq_{.0.5}/\sqrt{n} = \sqrt{3.14} \times q_{0.05} / \sqrt{6} = 2.9$$

ونحصل على قيمة $q_{.05}$ من جدول توزيع المدى المنسوب إلى t من أجل 3 و15 درجة من الحرية. وفترات الثقة بمعامل مشترك 95% هي :

$$-.8 < \mu_1 - \mu_2 < 5.0$$
$$-5.5 < \mu_1 - \mu_3 < .3$$
$$-7.6 < \mu_2 - \mu_3 < -1.8$$

(٥-٨) تمـــارين

١- افترض أن العدد X هو العدد الموجود في منزلة الآحاد من رقم الهاتف في دليل الهاتف ويتوزع بانتظام فوق الصحاح 0، 1، ...، 9. إذا اخترنا قيمة للمتغير X عشوائيا فإن :

$$P(X=x)=\frac{1}{10},\ x=0,1,\ldots,9$$

ومتوسط هذا التوزيع يساوي 4.5 لاحظ أن :

$$P(2.25 \le X \le 9)=\frac{7}{10}$$

ولكن الحادثة $A = \{2.25 \le X \le 9\}$ مكافئة للحادثة $\left\{\frac{1}{2}X \le 4.5 \le 2X\right\}$ ، ذلك لأن $2.25 \le X$ تكافئ $4.5 \le 2X$ و $X \le 9$ تكافئ $\frac{X}{2} \le 4.5$ ، وهكذا فإن :

$$P\left(\frac{1}{2}X \le \mu \le 2X\right)=\frac{7}{10}$$

، $L_1=\frac{1}{2}X$ و $L_2 = 2X$ ، تحدد 70% فترة ثقة للمتوسط μ. اختر عينة من 100 عدد من منازل الآحاد في 100 رقم هاتف تختارهم عشوائيا (إذا أمكن) من دليل الهاتف لديك، ولكل x تختاره احسب $L_1=\frac{1}{2}x$ و $L_2 = 2x$. ما هي نسبة الفترات (l_1, l_2) ضمن العينة التي تغطي القيمة $\mu = 4.5$؟

٢- ضع الأرقام المائة التي حصلت عليها في التمرين السابق في أزواج كأن تأخذ الأول مع الثاني ثم الثالث مع الرابع، وهكذا فتحصل على 50 زوجا. يمكن اعتبار هذه الأزواج الخمسين عينة عشوائية من التوزيع:

$$p(x_1,x_2)=\frac{1}{100},\ x_i=0,1,...,9\ \ ,i=1,2.$$

بما أن X_1 و X_2 مستقلان فلدينا:

$$P\left(\frac{1}{2}X_1\le\mu_{X_1}\le 2X_1,\frac{1}{2}X_2\le\mu_{X_2}\le 2X_2\right)=\left(\frac{7}{10}\right)^2$$

ومن أجل كل زوج يمكن تحديد منطقة ثقة رؤوسها الأربعة هي النقاط $\left(\frac{1}{2}x_1,\frac{1}{2}x_2\right)$ ، $\left(\frac{1}{2}x_1,2x_2\right)$ ، $\left(2x_1,\frac{1}{2}x_2\right)$ و $(2x_1,2x_2)$. ما هي النسبة من بين المناطق الخمسين التي تتضمن القيمتين الحقيقيتين للمتوسطين (4.5, 4.5)؟

٣- ترسل شركة شحن شاحنة كل يوم من A إلى C عن طريق B. وهي تحمّل حمولة في A وحمولة في B، لتسليمهما في C. افترض أنه يمكن، بتقريب جيد، اعتبار وزن الحمولة اليومية في A متغيرا طبيعيا بمتوسط μ_A وتباين σ^2 ووزن الحمولة اليومية في B متغيرا طبيعيا متوسطه μ_B وتباينه σ^2. ضع $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة لمتوسط وزن حمولة الشاحنة عندما تصل إلى C، على أساس المشاهدات المسجلة لِ n يوما.

٤- لنفرض أن لدينا الأسباب الكافية للاعتقاد بأن الانحراف المعياري للأطوال من مجموعة كبيرة من طلاب الجامعات هو 15سم. وأن توزيع الطول هو التوزيع الطبيعي. وعندما اخترنا عينة عشوائية من 100 طالب وجدنا أن متوسط الأطوال في العينة هو 175 سم احسب 95% فترة ثقة لمتوسط الطول.

٥- سحبنا خمس عينات من مجتمعات نفرض أنها طبيعية ولها التباين نفسه. وكانت قيم الكمية $(n-1)S^2=\Sigma(X_i-\overline{X})^2$ و n في العينات الخمس كما يلي:

S^2:	40	30	20	42	50
n:	6	4	3	7	8

أوجد 98% فترة ثقة للتباين المشترك.

٦- لتكن X' أكبر ملاحظة في عينة حجمها n من التوزيع المنتظم $f(x)=\frac{1}{\vartheta}$ ، $(0<X<\vartheta)$ بين أن توزيع $U=\frac{X'}{\vartheta}$ مستقل عن ϑ ، وباستخدام U أوجد أقصر فترة ثقة لـ ϑ حيث معامل الثقة يساوي γ -1.

٧- إذا كانت العينة في المسألة السابقة هي (2.9, 1.8, 4.6, 1.9) فاحسب 95% فترة ثقة للمعلمة ϑ.

٨- باستخدام دالة الكثافة :

$$f(x)=\frac{4X^3}{\vartheta^4}, 0<X<\vartheta$$

من أجل أكبر ملاحظة من عينة حجمها $n = 4$ من دالة الكثافة المنتظمة المذكورة في المسألة الثالثة ، ضع طريقة عامة لإيجاد 95% فترة ثقة للمعلمة ϑ ، وذلك بإيجاد $h_1(\vartheta)$ ، $h_2(\vartheta)$ ورسمهما في المستوى $\vartheta\hat{\vartheta}$. أوجد فترة الثقة الموافقة للعينة المعطاة في المسألة الرابعة. لماذا تختلف هذه الفترة عن الفترة التي وجدناها في تلك المسألة؟

٩- بالإشارة إلى المسألة السابقة ارسم $h_1(\vartheta)$ و $h_2(\vartheta)$ من أجل عينات حجمها 8 ، وتحقّق بصورة عامة أن أطوال فترات الثقة هذه تتناقص مع ازدياد حجم العينة n.

١٠- سحبنا العينة (2.3, 1.2, .9, 3.2) من المجتمع $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ ، $x > 0$ أوجد 90% فترة ثقة للمعلمة α.

١١- بالإشارة إلى المسألة السابقة أوجد 90% فترات ثقة للمتوسط والتباين. ما هو احتمال أن تغطي هاتان الفترتان كلاهما القيمة الحقيقية للمتوسط والقيمة الحقيقية للتباين ، على الترتيب؟

١٢– لنفرض أن دالة كثافة المتغير العشوائي المستمر X هو $f(x)$ وأنه متزايد من أجل $X < m$ ومتناقص من أجل $X > m$، أي أن له نهاية عظمى واحدة عند $X = m$.

(أ) بين أنه إذا كانت $0 < \alpha < 1$ وعرفنا R بالعلاقة :

$$1-\alpha = \int_{u}^{u+R} f(x)\, dx$$

وذلك من أجل جميع قيم u. فعندئذ تكون R أصغر ما يمكن من أجل قيمة لِ u أصغر من m تحقق العلاقة $f(u) = f(u + R)$.

(ب) استخدم نتائجك في (أ) لتبين كيف يمكنك إيجاد أقصر فترة ثقة لمتوسط توزيع طبيعي تباينه معروف.

١٣– من مجموع 8000 طالب. نأخذ عينة حجمها 100 في عملية سبر للرأي في قضية معينة ، فنسأل كل شخص وقع عليه الاختيار عن رأيه في هذه القضية. وقد وجدنا أن 75 منهم إيجابيين و25 سلبيين. أوجد 95% فترة ثقة للمعلمة p النسبة الحقيقية لمؤيدي هذه القضية بين الـ 8000 طالب.

١٤– عند قذف قطعة نقود 400 مرة حصلنا على وجه الكتابة 175 مرة وعلى وجه «النقش» 225 مرة. أوجد 90% فترة ثقة لاحتمال وجه الكتابة. أوجد 99% فترة ثقة لاحتمال وجه الكتابة. هل تبدو هذه القطعة متوازنة؟.

١٥– ما هو احتمال أن يكون طول فترة الثقة التي تعتمد على التوزيع t أقل من σ. وذلك من أجل عينات حجمها $n = 20$؟

١٦– قارن بين متوسط الطول لِ 95% فترات ثقة محسوبة بالاعتماد على التوزيع t مع متوسط طولها لو كان التباين معروفا.

١٧– بين أن متوسط وتباين طول فترة ثقة محسوب بالاعتماد على التوزيع t يتقاربان إلى الصفر عندما $N \to \infty$.

١٨– كم يجب أن يكون حجم عينة مأخوذة من مجتمع طبيعي بحيث أن احتمال كون طول 90% فترة ثقة للمتوسط μ (σ غير معروف) أقل من $\sigma/5$ هو 0.95؟

١٩– بين أن طول فترة الثقة للمعلمة σ في مجتمع طبيعي يتقارب إلى الصفر عندما $n \to \infty$.

٢٠– لنفرض أن المعلومات التالية هي من مجتمعات طبيعية متوسطاتها μ_1، μ_2 و μ_3 على الترتيب وتباينها المشترك σ^2:

59.7	60.2	60.5	61.2	60.3	1	
59.3	60.9	61.8	62.8	62.3	2	المجتمع
61.8	61.7	62.3	61.8	60.2	3	

والمطلوب وضع 95% فترات ثقة متعددة من أجل الفروق $(\mu_i-\mu_j)$.

الفصل السادس

المبادئ الأساسية في اختبار الفرضيات

(٦-١) اختبار الفرضيات الإحصائية

بصورة عامة، يمكننا تعريف الفرضية الإحصائية بأنها فرضية حول دالة كثافة أو دالة احتمال. فإذا قلنا أن النسبة p في توزيع ثنائي تساوي عددا معينا p_0 فإن $p = p_0$ هي فرضية إحصائية تتعلق بالمعلمة p التي تحويها عبارة التوزيع الثنائي. وفي حالة متغير مستمر لنأخذ المتغير العشوائي X الذي يمثل الزمن الفاصل بين ضربتين لعداد جايجر عند دراسة الإشعاعات الكونية، ولنعتبر أن دالة كثافة X هي الدالة الأسية:

$$f(x; \theta) = \theta e^{-\theta x}, x > 0 \qquad (١)$$

حيث θ معلمة تتوقف قيمتها على شروط التجربة، فافتراض أن دالة الكثافة هي دالة أسية يشكل بالطبع فرضية إحصائية. وإذا فرضنا بالإضافة إلى ذلك أن $\theta = 2$ فإن هذه الفرضية هي أيضا فرضية إحصائية. وهكذا فإن الفرضية الإحصائية قد تحدد شكل التوزيع أو تحدد قيمة معلمة أو أكثر من المعالم الواردة في عبارة التوزيع.

وما نقصده باختبار الفرضية الإحصائية هو الطريقة التي نقرر بموجبها قبول أو رفض الفرضية. ويسمح مثل هذا التعريف لاختبار فرضية إحصائية بحرية واسعة

للإحصائي كي يصمم اختباره. ولكن ما سيعنيه عند تصميم اختبار هو، في المرتبة الأولى، توافر عدد من الخواص التي يريد لاختباره هذا أن يتمتع بها. وإذا قرر إحصائي مثلا أن يصمم اختباره بحيث يرمي قطعة نقود ويقبل الفرضية إذا وفقط إذا، حصل على وجه «الصورة» فمن الطبيعي أن يكون مثل هذا الاختبار عديم الفائدة.

ولكي نوضح الكيفية التي يحاول بها الإحصائي تصميم اختبار يمتلك خواصا مرغوبة معينة، نأخذ مسألة تتعلق بدالة الكثافة الأسية في (١). فلنفترض أن فيزيائيا، انطلاقا من اعتبارات نظرية وتجريبية، كان على يقين من أن دالة الكثافة الموافقة للمتغير X الذي يمثل الزمن الفاصل بين ضربتين متتاليتين لعدّاد جايجر هي الدالة المعطاة في العلاقة (١). ولنفترض بالإضافة إلى ذلك أنه على نوع من اليقين بأن قيمة المعلمة θ من أجل المادة التي يقوم بتجاربه عليها هي إما $\theta = 1$ أو $\theta = 2$ وهو، معتمدا على بداهته، أكثر ميلا إلى القيمة $\theta = 2$. ولمساعدته في اختبار إحدى القيمتين يبدأ الإحصائي على النحو التالي:

يفترض أن قيمة المعلمة θ هي 2، ويعتبر هذه الفرضية هي الفرضية الإحصائية التي يريد اختبارها، وتسمى بالفرضية الابتدائية، ومن المتعارف عليه أن نرمز للفرضية الابتدائية بـ H_0. وتكون الفرضية $\theta = 1$ هي الفرضية البديلة ونرمز لها عادة بـ H_1.

لنأخذ الآن قياسا واحدا للمتغير X (نقوم عادة بأخذ عينة مؤلفة من n من القياسات ولكن للسهولة نفترض هنا $n = 1$) أي نأخذ قياسا واحدا للزمن الفاصل بين ضربتين متتاليتين لعداد جايجر. وعلى أساس القيمة التي نحصل عليها نتيجة لهذا القياس سنضع قرارنا إما بقبول H_0 أو رفضها، ورفض H_0 يعني بالطبع قبول H_1. والمسألة عندئذ هي تحديد قيم X التي ينبغي من أجلها قبول H_0، وتحديد القيم التي نرفض من أجلها H_0. وإذا اخترنا قيم X الموافقة للرفض فالقيم الباقية الممكنة لـ X تكون

حكما القيم الموافقة للقبول. ومن المتعارف عليه تسمية مجموعة القيم الموافقة للرفض بالمنطقة الحرجة وتسمية القياس X بإحصاء الاختبار. وفي مسألتنا هنا نجد أن فضاء المعاينة من أجل إحصاء الاختبار X هو النصف الموجب من المحور الحقيقي، ويمكن تمثيل كل قيمة ممكنة للقياس المأخوذ بنقطة على هذا المحور. وهكذا تكون منطقة الرفض مجموعة نقاط على هذا المحور. وبصورة عامة، إذا كان لدينا عينة من القياسات حجمها n فإن $(X_1,...,X_n)$ تمثل نقطة في فضاء ذي n بُعدا. وسنشير إليها فيما يلي بنقطة عينة. ويمكن تعريف المنطقة الحرجة بصورة عامة كما يلي:

تعـــريف (١)

المنطقة الحرجة أو منطقة الرفض لاختبار فرضية إحصائية هو الجزء من فضاء المعاينة الذي نرفض الفرضية من أجل كل نقطة من نقاطه.

وهكذا تكون مسألة وضع اختبار لفرضية H_0 هي مسألة اختيار المنطقة الحرجة (منطقة الرفض) من أجل هذا الاختبار، إذ نأخذ العينة ونحسب منها إحصاء الاختبار فإذا وقع في منطقة الرفض نرفض H_0 وفيما عدا ذلك نقبلها.

(٦-٢) نوعا الخطأ

لنفترض أن الإحصائي قد اختار بصورة كيفية المنطقة من المحور الحقيقي الواقعة إلى يمين النقطة $x = 1$ كمنطقة حرجة، أي المنطقة $x > 1$. فلكي نقرر ما إذا كان هذا الاختيار حكيما، علينا أن نأخذ بالاعتبار النتائج المترتبة عليه. فإذا كانت الفرضية H_0 صحيحة فعلا وحصلنا على قيمة X أكبر من الواحد، أي واقعة ضمن المنطقة الحرجة، فإننا سنرفض الفرضية H_0 بالرغم من أنها صحيحة أي أننا سنرتكب خطأ نسميه الخطأ من النوع الأول أو اختصارا الخطأ من النوع I. وعلى الوجه الآخر، إذا كانت H_1 هي

الفرضية الصحيحة فعلا ولم تتجاوز x القيمة 1 أي لم تقع في المنطقة الحرجة فإننا سنقبل الفرضية H_0 بالرغم من أنها غير صحيحة، وبذلك نرتكب خطأ نسميه الخطأ من النوع الثاني، أو الخطأ من النوع II. ونلخص في الجدول رقم (١) هذين القرارين الخاطئين بالإضافة إلى القرارين الآخرين الممكنين أي قبول الفرضية H_0 عندما تكون صحيحة ورفض الفرضية H_0 (قبول H_1) عندما تكون خاطئة، وكلاهما قرار صحيح.

الجدول رقم (٦-١).

	صحيحة H_0	صحيحة H_1
$x > 1$ (رفض H_0)	الخطأ من النوع I	قرار صحيح
$x \leq 1$ (قبول H_0)	قرار صحيح	الخطأ من النوع II

ويمكن القول، بصورة عامة، إن الخطأ من النوع I هو رفض فرضية ابتدائية صحيحة (أي الرفض الخاطئ) بينما الخطأ من النوع II هو قبول فرضية ابتدائية غير صحيحة (أي القبول الخاطئ).

ومن الضروري أن تتوافر لنا طريقة ما لقياس خطورة ارتكاب كل من الخطأين قبل أن نستطيع الحكم فيما إذا كان مثل هذا الاختيار للمنطقة الحرجة اختيارا موفقا. ومن أجل ذلك نستخدم ما يُسمى بحجم الخطأ كقياس لخطورته. ونعرف فيما يلي حجم الخطأ.

تعـــريف (٢)

حجم الخطأ من النوع الأول هو احتمال أن تقع نقطة العينة التي نحصل عليها ضمن منطقة الرفض علما أن الفرضية الابتدائية H_0 صحيحة. وحجم الخطأ من النوع الثاني هو احتمال أن تقع نقطة العينة خارج منطقة الرفض (ضمن منطقة القبول) علما أن الفرضية البديلة H_1 صحيحة.

والآن وفي ضوء حجمي الخطأين يمكن تقديم مبدأ بسيط نتّبعه عند تحديد الاختبار الأفضل لفرضية إحصائية: ((من بين كل الاختبارات التي تتساوى في حجم الخطأ من النوع I، نختار ذلك الاختبار الذي يجعل حجم الخطأ من النوع II أصغر ما يمكن)).

ويحدد الإحصائي سلفا حجم الخطأ من النوع I الذي يمكنه التساهل فيه والذي يدعى عادة مستوى الأهمية. ومن أجل حجم مثبت للعينة الإحصائية التي يستخدمها سيحاول وضع اختباره بحيث يجعل حجم الخطأ من النوع II أصغر ما يمكن. ومن أجل حجم ثابت للعينة يزداد عادة حجم الخطأ من النوع II عندما يتناقص حجم الخطأ من النوع I. ولذلك فإنه لا يمكن اعتماد حجم صغير جدا للخطأ من النوع I دون أن ندفع في مقابل ذلك زيادة في حجم الخطأ من النوع II. ونعتمد في التطبيقات العملية، عادة، حجم خطأ من النوع الأول إما 0.10 أو 0.05 أو 0.01، وفقا لطبيعة المسألة المدروسة. وتمثل القيمة 0.01 موقفا شديد التحفّظ ضد التورط بخطأ من النوع الأول بينما تمثل القيمة 0.10 قيمة غير متحفظة، أما القيمة 0.05 فهي بين بين، وليس لهذه القيم بالذات أي نوع من الخصوصية إذ كان يمكن تبنّي غيرها، ولكن كان لابد من تحديد قيم متفق عليها لحجم الخطأ من النوع الأول كي يمكن وضع جداول إحصائية يسهل الرجوع إليها في وقت لم تكن الحاسبات الآلية بعد متوافرة. ومع توافر الحزم الإحصائية الحديثة يقدم الحاسب الآلي **قيمة تسمى القيمة -P (*P-Value*) وهي تعني ما يلي**:

لو أنك رفضت الفرضية H_0 فإن احتمال تورّطك بخطأ من النوع الأول هو P. وتترك هذه الطريقة المجال رحبا أمام الباحث أو المجرّب ليبلور قراره برفض H_0 أو عدم رفضها، وذلك وفقا لدرجة استعداده للتورط بقرار خاطئ هو رفض H_0 مع أنه كان ينبغي ألا يرفضها. ولو أن القيمة -P كانت، مثلا، 0.15، فهي تقول لصاحب القرار

إنك إذا قّررت رفض H_0 فقد يكون قرارك هذا خاطئا باحتمال خمسة عشر بالمائة ، وإذا كنت مستعدا لمثل هذه المغامرة ارفض ، وإن لم تكن مستعدا فمن الحكمة ألا ترفض H_0. وفي المقابل لو كانت القيمة -P هي واحد بالألف فسوف لا يتردد المجرب باتخاذ قرار الرفض. ويجدر الانتباه هنا إلى أن صاحب القرار يمكن أن يكون المجرّب أو المموّل المعني بالدراسة الإحصائية ، كأن يكون مدير شركة ، مثلا ، فعندئذ له ملء الحرية في أن يتخذ قراره أو يحدد سياسة شركته مهتديا بالدلالات الإحصائية المتوافرة له. وعلى الوجه الآخر قد لا يكون القرار من صلاحية المجرّب أو الباحث وإنما يعود إلى جهات خارجية ، فمثلا يعود القرار باعتماد علاج جديد لمرض معين إلى منظمات صحية محلية أو دولية ، وفي مثل هذه الحالات لابد أن تحقق الدلالات الإحصائية مستوى معينا متفقا عليه. وفي الواقع العملي ينبغي للمجرب أن يعتمد مستوى أهمية α قبل تحليل البيانات فإذا جاءت القيمة -P أقل أو تساوي α يرفض H_0 وإذا كانت أكبر من α لا يرفض.

والخلاصة إن القيمة -P التي تقدمها الحزمة الإحصائية محسوبة على أساس أن القيمة التي نتجت لإحصاءة الاختبار هي بداية منطقة الرفض وبالتالي فإن P تمثل حجم هذه المنطقة.

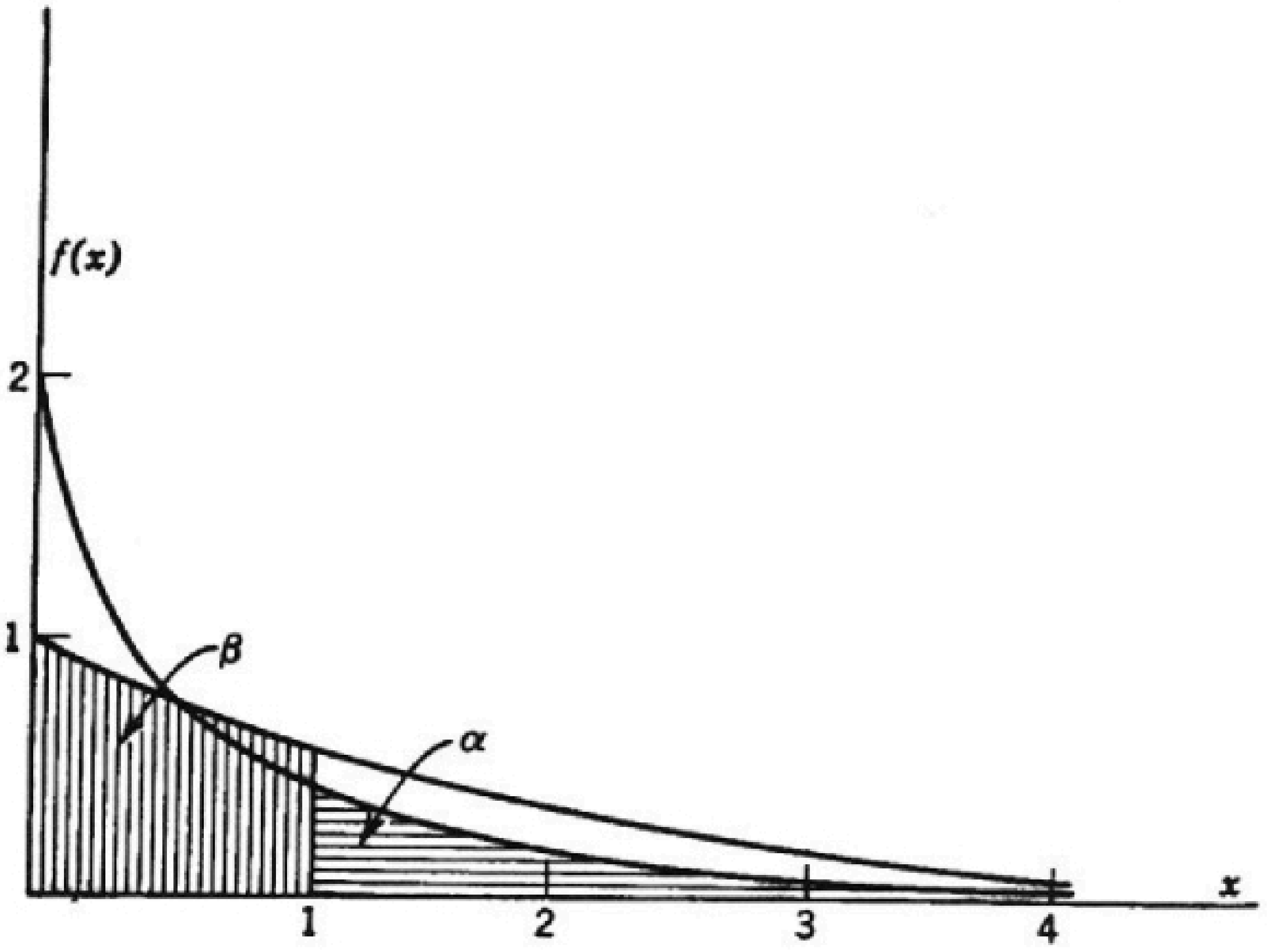
لنناقش الآن مسألتنا هنا بالاستناد إلى المبدأ المذكور أعلاه. ولنرمز لحجمي الخطأين من النوع I وII بـ α وβ على الترتيب. ولحساب α نذكر أنها تساوي احتمال الحصول على قياس x يتجاوز الواحد علما أن H_0 صحيحة أي $\theta = 2$ ، أي أن :

$$\alpha = \int_1^\infty 2e^{-2x}\,dx = .135$$

أما β فهي احتمال الحصول على قيمة لـ x أقل أو تساوي الواحد علما أن H_1 صحيحة أي $\theta = 1$. وهذا يعني أن :

$$\beta = \int_{0}^{1} e^{-x}\, dx = .632$$

ويبين الشكل رقم (٦-١) المساحتين تحت منحني الكثافة اللتين تمثلان α وβ (لدينا منحني كثافة تحت الفرضية H_0 هو $2e^{-2x}$، ومنحني كثافة آخر e^{-x} تحت الفرضية H_1).



الشكل رقم (٦-١).

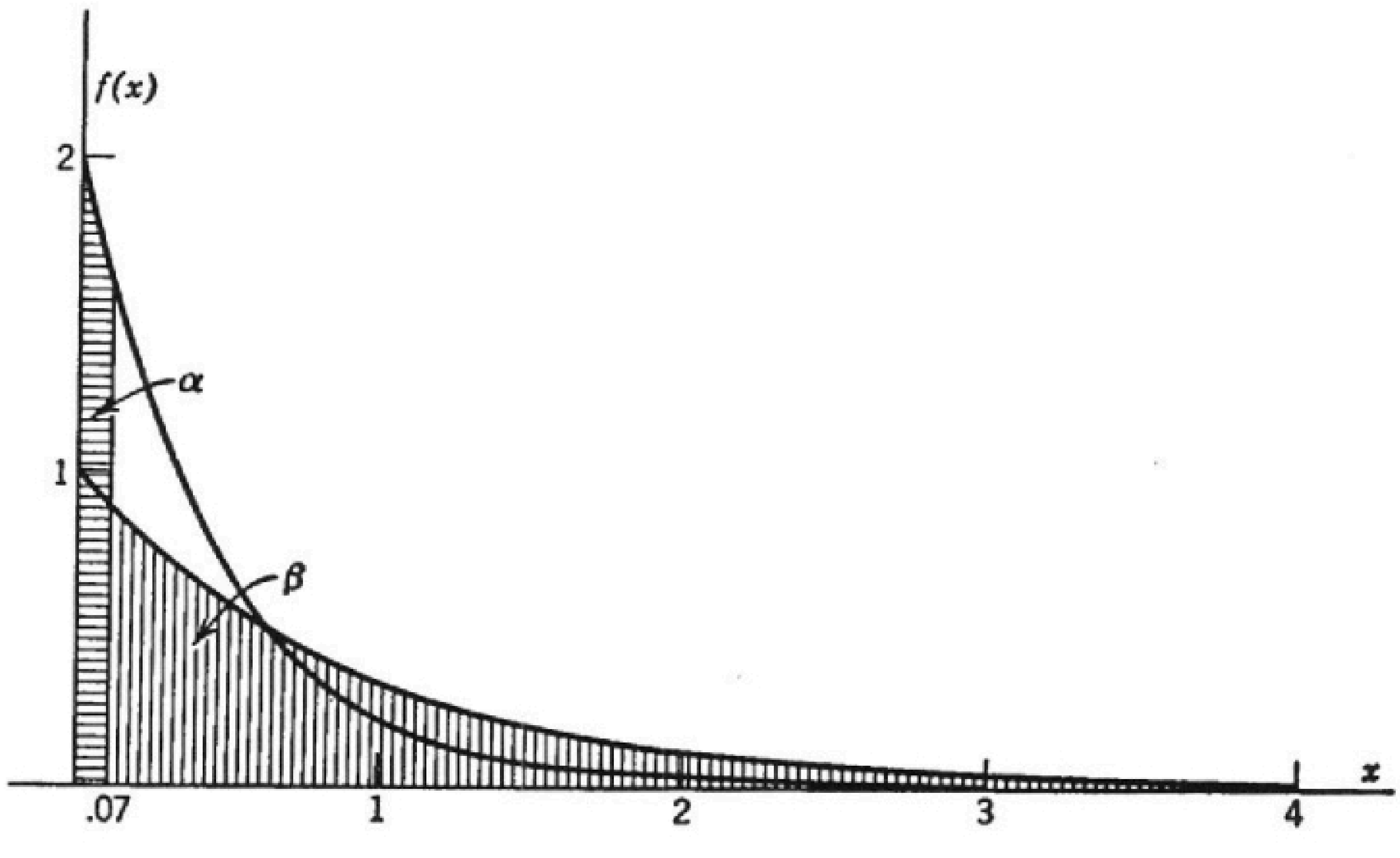
وللحكم على جودة مثل هذا الاختبار، أي جودة الاختيار الذي اعتمدناه للمنطقة الحرجة، لابد من مقارنة هذا الاختبار مع الاختبارات الأخرى التي يكون من أجلها $\alpha = 0.135$، أي لها نفس حجم الخطأ من النوع I. وسنكتفي هنا بأخذ اختباراً واحداً من أجل توضيح طريقة المقارنة فقط. فلنفترض إننا اخترنا المنطقة الحرجة في الجانب الأيسر من المنحني بدلا من الجانب الأيمن، أي اعتمدنا منطقة من النوع $0 < x < x_0$ كمنطقة حرجة حيث x_0 عدد ثابت يجري تحديده بحيث يكون $\alpha = 0.135$ وذلك بدلا من المنطقة الحرجة السابقة $x > 1$. والمطلوب مقارنة المنطقتين الحرجتين، أي الاختبارين الموافقين لهما، أيهما يمكن اعتباره الأفضل. ولتحديد النقطة x_0 علينا حل المعادلة :

$$\int_0^{x_0} 2e^{-2x}\,dx = .135$$

من أجل x_0. وبإجراء التكامل وحل المعادلة الناتجة نجد $x_0 = 0.07$. والآن يمكننا حساب حجم الخطأ من النوع II أو β من أجل الاختبار الجديد المقترح فنكتب:

$$\beta = \int_{.07}^{\infty} e^{-x}\,dx = .932$$

ويبين الشكل رقم (٦-٢) حجمي الخطأين من النوع I وII من أجل الاختبار الجديد.



الشكل رقم (٦-٢).

وبمقارنة قيمتي β من أجل الاختبارين يتضح لنا تفوق الاختبار الأول على الاختبار الثاني. فالاختبار الثاني يمكن أن يقبل الفرضية H_0 في حال كونها خاطئة بنسبة 93% على المدى الطويل، بينما يقود الاختبار الأول إلى مثل هذا الخطأ بنسبة 63% فقط على المدى الطويل. ونلاحظ أن β كبير من أجل كل من الاختبارين إلا أن هذا ليس غريبا طالما أننا اكتفينا بملاحظة واحدة فقط أي أن حجم العينة التي نستقرئ بالاستناد

إليها هو أصغر ما يمكن. وباستخدام طرق سنعرضها بعد قليل يمكن البرهان على أن الاختبار الأول هو أفضل الاختبارات الممكنة لمثل هذه المسألة وذلك وفقا للمبدأ المذكور أعلاه.

(٦-٣) دالة القوة

تعود سهولة المناقشة التي عرضناها في الفقرة السابقة، بصورة رئيسية، إلى وجود فرضية بديلة واحدة H_1 للفرضية الابتدائية H_0 التي نختبرها. ولكن معظم المسائل تتضمن أكثر من فرضية بديلة واحدة. **فعلى سبيل المثال**، إذا كنا نرغب في معرفة ما إذا كانت نسبة القطع المصنوعة التي تحوي عيبا صناعيا في طريقة معينة للإنتاج قد إزدادت، ففي هذه الحالة نختبر الفرضية $H_0: p = p_0$ حيث p_0 هي النسب المعتادة في الماضي ضد الفرضية البديلة $H_1: p > p_0$ وفي المسألة التي ناقشناها في الفقرة السابقة يمكن أن يفضل الفيزيائي اختبار الفرضية $H_0: \theta = 2$ ضد البديل $H_1: \theta < 2$ بدلا من $H_1: \theta = 1$. وقد تتوفر للمجرب أسباب نظرية وتجريبية لمعرفة أي قيمة للمعلمة نريد اختبارها ولكنه نادرا ما يستطيع تبني قيمة معينة كقيمة بديلة وذلك في حالة كون الفرضية H_0 خاطئة.

وفي حالة وجود مجموعة من القيم البديلة الممكنة فإن β حجم الخطأ من النوع II سيتوقف على القيمة θ التي نعتمدها كبديل. ولتحديد مدى جودة الاختبار الآن بالمقارنة مع اختبار آخر لابد من مقارنة قيمة β من أجل كل القيم البديلة الممكنة لـ θ، ولا يمكن الاكتفاء بالمقارنة من أجل قيمة واحدة لـ θ فقط كما رأينا في الفقرة السابقة. ولذلك فإنه من الضروري حساب حجم الخطأ من النوع II كدالة في θ، وسنرمز له بـ $\beta(\theta)$ وهو يمثل كما نعلم احتمال أن تقع نقطة العينة ضمن منطقة القبول أي خارج منطقة الرفض علما أن θ هي القيمة الفعلية للمعلمة. ومن الأسهل إجراء حساباتنا فوق

منطقة الرفض فقط فنحسب بدلا من $\beta(\theta)$ الدالة $\pi(\theta) = 1 - \beta(\theta)$ ، وهو احتمال أن تقع نقطة العينة داخل منطقة الرفض علما أن θ هي القيمة الفعلية للمعلمة، وتسمى هذه الدالة الجديدة $\pi(\theta)$ قوة الاختبار ونقدم فيما يلي تعريفها العام.

تعـــريف (٣)

دالة القوة $\pi(\theta)$ لاختبار معين هي دالة في المعلمة θ تعطي احتمال رفض الفرضية الأساسية، (وقوع نقطة العينة ضمن منطقة الرفض)، وذلك من أجل كل قيمة من القيم البديلة للمعلمة θ، (عندما تكون القيمة الحقيقية θ أي نقطة في منطقة الرفض).

ويعني هذا أن دالة القوة لاختبار الفرضية $\theta = \theta_0$ هي الدالة التي تمثل قيمتها عند $\theta = \theta_1$ احتمال رفض الفرضية $\theta = \theta_0$ علما أن القيمة الحقيقية لـِ θ هي $\theta = \theta_1$. وبما أن $\pi(\theta) = 1 - \beta(\theta)$ فإن جعل $\beta(\theta)$ أصغر ما يمكن يكافئ جعل دالة القوة $\pi(\theta)$ أعظم ما يمكن.

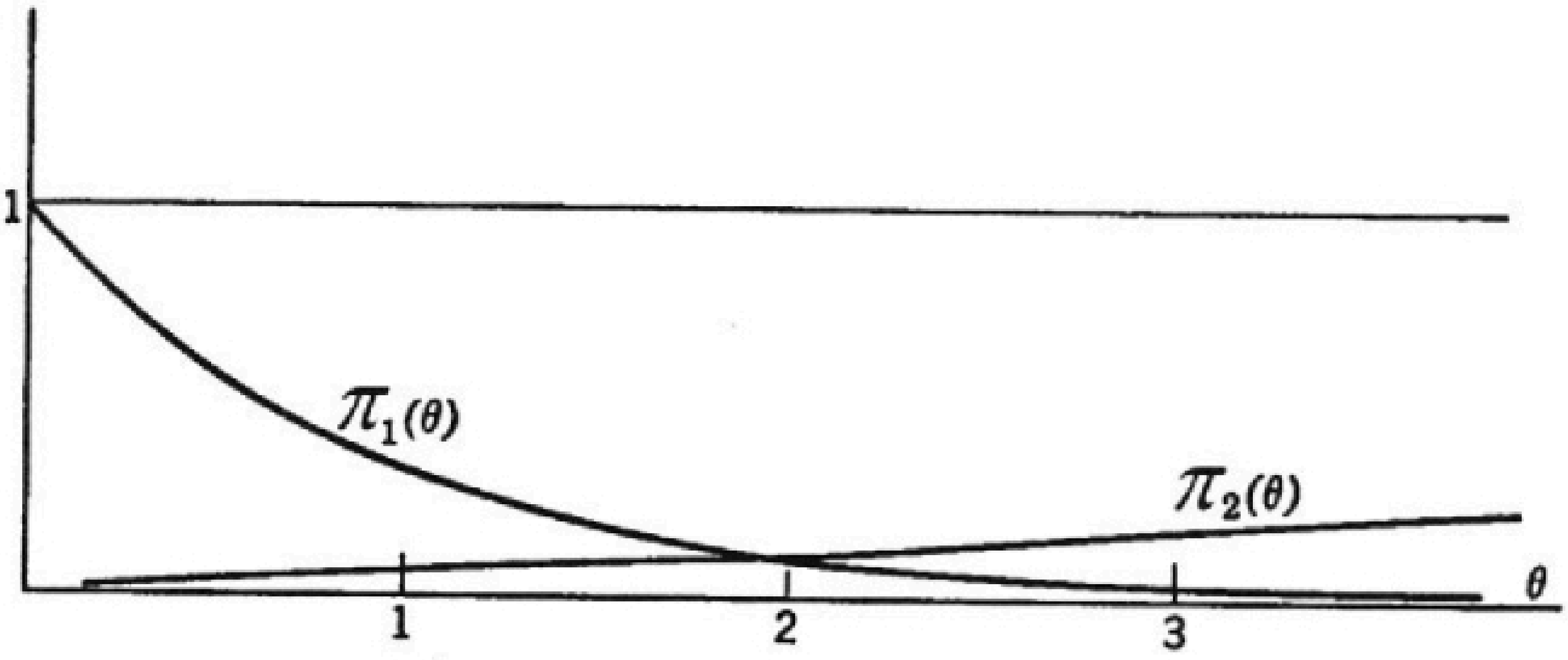
وسنستخدم المسألة التي ناقشناها في الفقرة السابقة لتوضيح كيفية الاستفادة من دالة القوة لاختيار الاختبار الأفضل وذلك عندما تتضمن الفرضية البديلة مجموعة من القيم الممكنة للمعلمة وليس قيمة واحدة. فلنفرض هنا أن $H_0: \theta = 2$ كما سبق، ولكن الفرضية البديلة الآن هي $H_1: \theta < 2$. ولنقارن بين المنطقتين الحرجتين $x > 1$ و$x < 0.07$، أي بين الاختبارين الموافقين لهما. وكما نعلم فإن حجم الخطأ من النوع I بالنسبة لكل من المنطقتين هو $\alpha = 0.135$ ولحساب دالتي القوة الموافقتين $\pi_1(\theta)$ و$\pi_2(\theta)$ يكفي مكاملة دالة الكثافة (في صيغتها المناسبة للفرضية البديلة H_1) فوق المنطقة الحرجة. وهكذا نجد:

$$\pi_1(\theta) = \int_1^{\infty} \theta e^{-\theta x}\, dx = e^{-\theta} \qquad (٢)$$

و

$$\pi_2(\theta)=\int_0^{.07}\theta e^{-\theta x}\,dx=1-e^{-.07\theta} \qquad (٣)$$

ويبين الشكل رقم (٦-٣) المنحنيين البيانيين لدالتي القوة. ولابد أن يتقاطع المنحنيان في النقطة (2, 0.135)، ذلك لأنه عندما تكون $\theta = 2$ أي تأخذ دالة الكثافة الشكل الموافق للفرضية الابتدائية H_0 فإن قيمة كل من π_1 وπ_2 هي α، وقد رأينا أنها تساوي 0.135، ونلاحظ أن دالة القوة $\pi_1(\theta)$ تقع فوق $\pi_2(\theta)$ من أجل جميع قيم θ الموافقة للفرضية البديلة، أي من أجل $\theta < 2$. وهذا يعني أن الاختبار الأول (أي المنطقة الحرجة $x < 1$) متفوق على الاختبار الثاني. وسنرى بعد قليل أن الاختبار الأول لا يتفوق على الاختبار الموافق للمنطقة الحرجة $x < 0.07$ فقط، وإنما يتفوق على أي اختبار آخر له نفس مستوى الأهمية، أي على أية منطقة حرجة حجمها $\alpha = 0.135$. ويدعى مثل هذا الاختبار عادة الاختبار الأكثر قوة بانتظام.



الشكل رقم (٦-٣).

(٦-٤) أنواع الاختبارات

لتكن $f(x;\ \theta_1,\theta_2,...,\theta_k)$ دالة كثافة تحوي k من المعالم فالفرضية الإحصائية هي، في هذه الحالة، فرضية حول المعالم θ_1، . . . ، θ_k. ومن المناسب عند دراسة فرضيات كهذه، تصنيفها إلى نوعين كما يلي.

تعـــريف (٤)

إذا حـددت الفرضـية الابتدائيـة H_0 قـيم جميـع المعـالم الـتي تحويهـا عبـارة دالـة الكثافـة أو الدالـة الاحتماليـة قلنـا إنهـا فرضـية بسـيطة. وتكـون فيمـا عـدا ذلـك فرضـية مركبة.

وكتوضيح لنفرض أن دالة الكثافة هي :

$$f(x;\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{\theta_2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right)^2} \quad ; \quad -\infty < x < \infty \,, -\infty < \theta_1 < \infty \qquad (٤)$$

فإذا كانت الفرضية من النوع $H_0\colon \theta_1 = 10 \,,\ \theta_2 = 2$، مثلا : أي أنها تحدد قيمة معينة لكل من θ_1 و θ_2 فهي فرضية بسيطة، أما الفرضـية $H_0\colon \theta_1 = 10,\ \theta_2 < 2$، مـثلا، فهـي فرضـية مركبة. والنظريات المتعلقة بتصميم اختبارات جيدة من أجل فرضيات بسيطة هي أبسط بكثير من تلـك الـتي تعـالج حالـة الفرضـيات المركبـة. وسـنناقش في الفقـرتين القـادمتين طريقتين لوضع اختبارات جيدة، الأولى تُطبق مباشرة على الفرضـيات البسـيطة فقـط، علمـا أنهـا يمكـن أن تقـدم أيضـا حـلا بالنسبة لـبعض الفرضـيات المركبـة، بينمـا تنطبـق الطريقة الثانية على حالتي الفرضيات البسيطة والفرضيات المركبة.

(٦-٥) أفضل الاختبارات من أجل الفرضيات البسيطة

سـنعطي في هـذه الفقـرة طريقـة للوصـول إلى أفضـل الاختبـارات للفرضـيات البسيطة وذلك في ضوء المبدأ الذي استعرضناه في الفقرة (٦-١). وتعتمـد هـذه الطريقـة على تمهيد يسمى **تمهيد نيمان – بيرسون**، وسنقوم ببرهـان هـذا التمهيـد مـن أجـل دالـة كثافة $f(x;\theta)$ تحوي متغيرا واحدا X ومعلمـة واحـدة θ. وينبغـي فهـم المتغيرات $X_1,\ldots,X_n$ المذكورة في النظرية علـى أنهـا تمثـل عينـة عشـوائية حجمهـا n مـن المجتمـع الموافـق لدالـة

الكثافة $f(x;\theta)$. وتتعلق النظرية باختبار فرضية بسيطة $H_0: \theta = \theta_0$ ضد بديل بسيط $H_1: \theta = \theta_1$.

تمهيد نيمان – بيرسون.

لتكن A منطقة حرجة حجمها α وليكن k عددا ثابتا بحيث إن :

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)} \le k \quad , \quad A \text{ داخل} \qquad (٥)$$

و

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)} > k \quad , \quad A \text{ خارج} \qquad (٦)$$

فإن المنطقة A تكون أفضل منطقة حرجة حجمها α لاختبار الفرضية $H_0: \theta = \theta_0$ ضد البديل $H_1: \theta = \theta_1$.

برهـــــان

لتكن A^* أي منطقة حرجة أخرى حجمها α. فيمكن تمثيل المنطقتين A وA^* كمنطقتين داخليتين للسطحين المغلقين في الشكل رقم (٦-٤). ولتبسيط الرموز لتكن :

$$L_0 = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0) \qquad (٧)$$

وهي دالة الكثافة المشتركة للعينة $X_1,\ldots,X_n$ عندما تكون الفرضية H_0 صحيحة. ولتكن :

$$L_1 = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1) \qquad (٨)$$

وهي دالة الكثافة المشتركة عندما تكون الفرضية H_1 صحيحة. ولنكتب من أجل الاختصار أيضا :

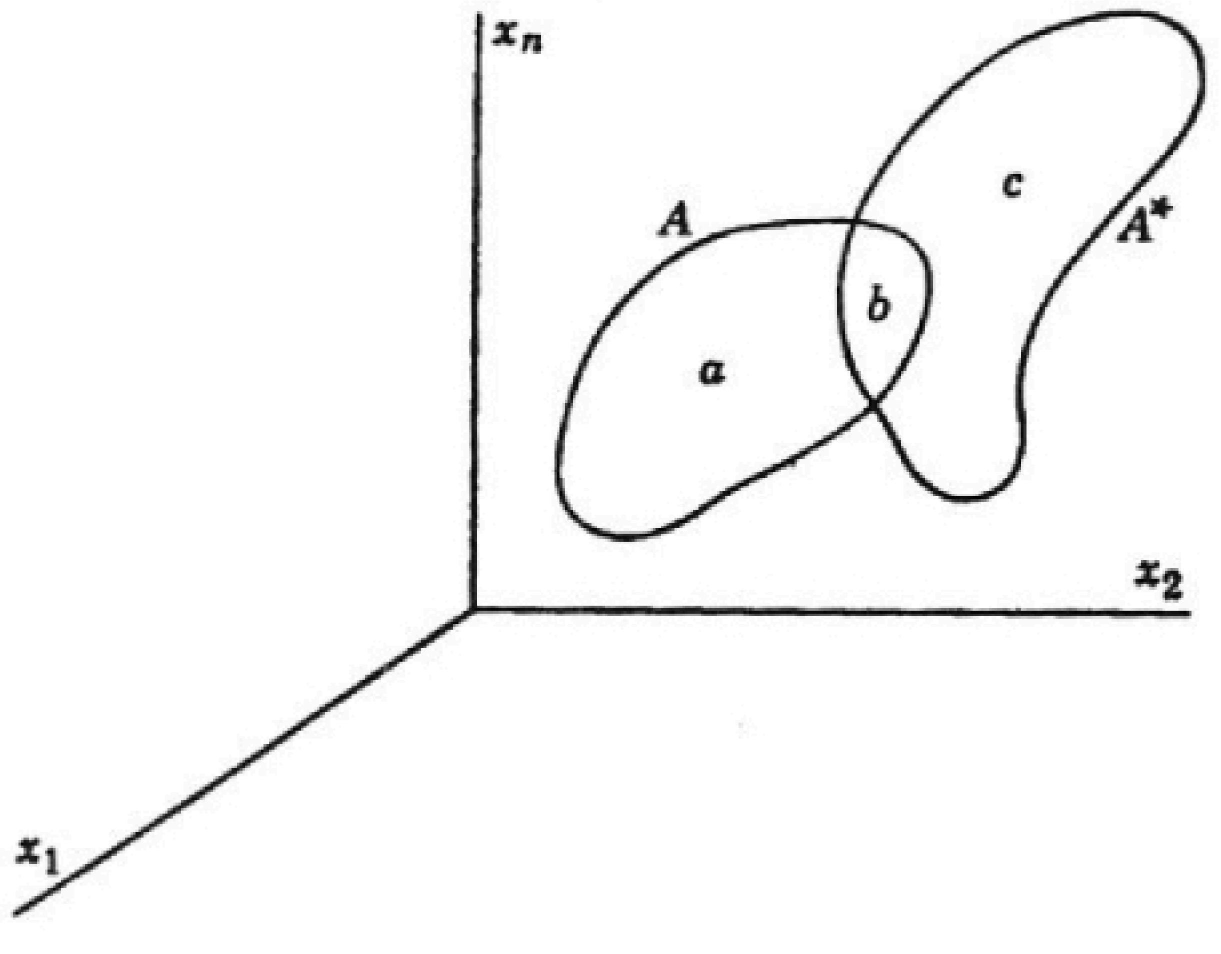
$$\int_A \cdots \int \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_A L_0\, dx \qquad (٩)$$

و

$$\int_A \cdots \int \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_A L_1\, dx \qquad (١٠)$$

وبما أن كلاً من A وA^* منطقة حرجة حجمها α فيمكن كتابة:

$$\int_A L_0\, dx = \int_{A^*} L_0\, dx \qquad (١١)$$



الشكل رقم (٦-٤).

ويتضح من الشكل رقم (٦-٤) أن التكامل فوق الجزء b وهو الجزء المشترك بين A وA^* يمكن اختصاره من طرفي (١١) لتصبح:

$$\int_a L_0\, dx = \int_c L_0\, dx \qquad (١٢)$$

لنحسب الآن حجم الخطأ من النوع II لكل من المنطقتين A وA^*. بما أن حجم الخطأ من النوع II هو احتمال أن تقع نقطة العينة $(X_1,...,X_n)$ خارج المنطقة الحرجة علما أن H_1 صحيحة، فإنه يساوي أيضا للواحد ناقصا احتمال وقوع نقطة العينة داخل المنطقة الحرجة علما أن H_1 صحيحة، مما يسمح لنا بكتابة:

$$\beta^* = 1 - \int_{A^*} L_1\, dx$$

و

$$\beta = 1 - \int_A L_1\, dx$$

ومنه :

$$\beta^* - \beta = \int_A L_1\, dx - \int_{A^*} L_1\, dx$$

وإذا اختصرنا التكامل فوق الجزء المشترك b نجد :

$$\beta^* - \beta = \int_a L_1\, dx - \int_c L_1\, dx \tag{١٣}$$

وبما أن المنطقة a تقع ضمن A فنجد من (٥) أن كل نقطة من a تحقق المتراجحة :

$$L_0 \le k\, L_1$$

ومنه :

$$\int_a L_1\, dx \ge \frac{1}{k} \int_a L_0\, dx \tag{١٤}$$

وبصورة مشابهة ، بما أن c تقع خارج A فكل نقطة من c تحقق بالاستناد إلى (٦) المتراجحة :

$$L_0 > k\, L_1$$

ومنه :

$$\int_c L_1\, dx < \frac{1}{k} \int_c L_0\, dx \tag{١٥}$$

وبالاستفادة من (١٤) و (١٥) في (١٣) نجد أن :

$$\beta^* - \beta \ge \frac{1}{k} \int_a L_0 dx - \frac{1}{k} \int_c L_0 dx$$

وبالاستناد إلى (١٢) نجد أن الطرف الأيمن يجب أن يكون مساويا للصفر أي أن :

$$\beta^* \ge \beta \tag{١٦}$$

وإذا تذكرنا أن β^* هو حجم الخطأ من النوع II من أجل أي منطقة حرجة حجمها α ومغايرة لِ A ، فإن هذه النتيجة تبرهن على أن أفضل منطقة حرجة من بين المناطق الحرجة ذات الحجم α هي المنطقة A.

ونختار الثابت k المذكور في التمهيد بحيث نجعل حجم المنطقة الحرجة A مساويا لـ α كما هو مفترض، وفي معظم المسائل يتغير حجم المنطقة A من 0 إلى 1 عندما يتغير k من 0 إلى اللانهاية، مما يجعل تحديد القيمة المناسبة لـ k ممكناً.

مـــثال (١)

سنشرح مضمون وفائدة هذا التمهيد من خلال أمثلة توضيحية. فلنعد الآن إلى مسألتنا المتعلقة بالتوزيع الأسي والتي طرحناها في مطلع هذا الفصل حيث نأخذ عينة حجمها n من دالة الكثافة:

$$f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x} \quad , \quad x \geq 0$$

والمطلوب اختبار الفرضية $H_0: \theta = \theta_0$ ضد البديل $H_1: \theta = \theta_1 < \theta_0$. ودالة الإمكانية تحت الفرضية H_0 هي:

$$L_0 = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0) = \theta_0^n e^{-\theta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

وتصبح تحت الفرضية H_1:

$$L_1 = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1) = \theta_1^n e^{-\theta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

وبالاستناد إلى تمهيد نيمان - بيرسون فإن أفضل منطقة حرجة A هي المنطقة المعرفة بالمتراجحة:

$$\frac{\theta_0^n e^{-\theta_0 \Sigma x_i}}{\theta_1^n e^{-\theta_1 \Sigma x_i}} \leq k$$

أو

$$e^{(\theta_1-\theta_0)\Sigma x_i} \leq k \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n$$

وبأخذ اللوغاريتم تصبح المتراجحة:

$$(\theta_1-\theta_0)\Sigma x_i \le log\left[k\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n\right] = log\, k + n(log\,\theta_1 - log\,\theta_0)$$

وبما أن $\theta_1 < \theta_0$ فإن:

$$\Sigma x_i \ge \frac{\log\left[k(\theta_1/\theta_0)^n\right]}{\theta_1-\theta_0} \qquad (١٧)$$

وفي الحالة التي ناقشناها في مطلع الفصل كان $n = 1$، $\theta_0 = 2$ و$\theta_1 = 1$. وأفضل منطقة حرجة لمثل تلك الحالة، كما تحددها العلاقة (١٧) هي الجزء من محور السينات الواقع إلى يمين النقطة:

$$x_0 \ge \frac{\log\left[k(\theta_1/\theta_0)\right]}{\theta_1-\theta_0} = -\log\frac{k}{2} \qquad (١٨)$$

ويتم اختيار k، وبالتالي x_0، بحيث يكون $P(X > x_0) = 0.135$، طالما أننا اخترنا حجم الخطأ من النوع I ليكون 0.135، وهذا يثبت أن المنطقة الحرجة التي تمثل الذيل الأيمن من المنحني هي أفضل منطقة حرجة ممكنة.

والعمليات التحليلية التي أدت إلى العلاقة (١٧) لم تعتمد أبدا على القيمة الخاصة θ_1 التي اخترناها لِـ θ طالما أن هذه القيمة هي أصغر من θ_0. ولذلك فإنه يمكن استخدام المنطقة الحرجه الحرجه نفسها مهما كانت قيمة θ_1 شريطة أن يكون $\theta_1 < \theta_0$. وبالطبع فإن قيمة الثابت k الضرورية لإنتاج القيمة نفسها لـِ x_0 في (١٨) ستعتمد على قيمة θ_1. وهذا يبين أن (١٧) تعطي أفضل منطقة حرجة لاختبار الفرضية $H_0\colon\ \theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة المركبة $H_1\colon \theta < \theta_0$. وهكذا فإنه بالرغم من أن تمهيد نيمان - بيرسون قد صُمم لاختبار فرضية ابتدائية بسيطة ضد فرضية بديلة بسيطة إلا أنه يمكننا أحيانا الاستفادة منها في حالات تكون فيها الفرضية البديلة مركبة. ومنه نستنتج من أجل المسألة المطروحة في الفقرة (٦-٣) أن أفضل منطقة حرجة لاختبار الفرضية $H_0\colon \theta = 2$ ضد البديل $H_1\colon \theta < 2$ هي المنطقة التي اخترناها في حينها.

وبصورة عامة، نقول بالاستناد إلى (١٧) أن أفضل منطقة حرجة لاختبار الفرضية $H_0: \theta = \theta_0$ ضد البديل $H_1: \theta < \theta_0$ هي المنطقة التي تحتل الذيل الأيمن من دالة كثافة الإحصاء $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ وهو إحصاء الاختبار في هذه الحالة.

مــثال (٢)

لتكن $X_1,\ldots,X_n$ عينة من توزيع طبيعي تباينه الواحد ومتوسطه θ. والمطلوب اختبار الفرضية $H_0: \theta = \theta_0$ ضد البديل $H_1: \theta = \theta_1 < \theta_0$.

لدينا هنا:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

وبالتالي:

$$L_0 = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta_0) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2}$$

و

$$L_1 = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta_1) = (2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2}$$

والمنطقة A التي يحددها تمهيد نيمان – بيرسون هي تلك التي تحقق المتراجحة:

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}\Sigma(x_i-\theta_0)^2}}{e^{-\frac{1}{2}\Sigma(x_i-\theta_1)^2}} = e^{-\frac{1}{2}[\Sigma(x_i-\theta_0)^2 - \Sigma(x_i-\theta_1)^2]} \leq k$$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين نجد:

$$\Sigma(x_i - \theta_0)^2 - \Sigma(x_i - \theta_1)^2 \geq -2 \log k$$

أو

$$2(\theta_1 - \theta_0)\Sigma x_i \geq -2 \log k + (\theta_1^2 - \theta_0^2)n$$

وبقسمة الطرفين على الكمية السالبة $2n(\theta_1 - \theta_0)$ نجد:

$$\bar{x} \le \frac{-2\log k + (\theta_1^2 - \theta_0^2)n}{2n(\theta_1 - \theta_0)} \qquad (١٩)$$

ويعني هذا أن أفضل منطقة حرجة هي المنطقة التي تحتل الذيل الأيسر من دالة كثافة إحصاء الاختبار $\bar{X}$ وهي دالة كثافة طبيعية بمتوسط يساوي θ وتباين يساوي $\frac{1}{n}$ كما نعلم.

وإذا اعتمدنا حجما للخطأ من النوع I مساويا لـ α ورمزنا للطرف الأيمن من (١٩) بـ $\bar{x}_0$ فيمكن تحديد $\bar{x}_0$ بحيث يكون احتمال وقوع $\bar{x}$ إلى يسار $\bar{x}_0$ علماً أن H_0 صحيحة (أي $\theta = \theta_0$) مساويا لـ α أي:

$$P(\bar{X} < \bar{x}_0 | \theta = \theta_0) = \alpha$$

أو

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\bar{x}_0} e^{-\frac{n}{2}(\bar{x}-\theta_0)^2} d\bar{x} = \alpha$$

وإذا كانت $\alpha = 0.05$ ، مثلا ، فيمكننا باستخدام جدول التوزيع الطبيعي كتابة:

$$\frac{\bar{x}_0 - \theta_0}{1/\sqrt{n}} = -1.645$$

أو:

$$\bar{x}_0 = \theta_0 - \frac{1.645}{\sqrt{n}}$$

وبصورة مشابهة لما رأيناه في المثال السابق نلاحظ أن شكل المنطقة الحرجة التي حصلنا عليها في (١٩) سيبقى نفسه بصرف النظر عن القيمة البديلة θ_1 شريطة أن تكون أقل من θ_0 ، وبالتالي فإن المنطقة الحرجة (١٩) هي أفضل منطقة حرجة لاختبار الفرضية $H_0: \theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة الأعم $H_1: \theta < \theta_0$.

وإذا كانت $\theta_1 > \theta_0$ فإن اتجاه المتراجحة في (١٩) سينعكس، وستكون أفضل منطقة حرجة في هذه الحالة هي المنطقة التي تحتل الذيل الأيمن من دالة كثافة المتوسط

$\bar{x}$. وتبقى هذه المنطقة أفضل منطقة حرجة من أجل اختبار الفرضية $H_0{:}\theta = \theta_0$ ضد البديل $H_1{:}\ \theta > \theta_0$.

وإذا رغبنا في اختبار الفرضية $H_0{:}\ \theta = \theta_0$ ضد البديل $H_1{:}\ \theta \neq \theta_0$ فلا يمكن العثور على أفضل منطقة حرجة من أجل جميع القيم البديلة θ_1 ، ذلك لأن الذيل الأيسر سيكون أفضل منطقة حرجة من أجل $\theta_1 < \theta_0$ ، بينما ستكون أفضل منطقة حرجة من أجل $\theta_1 > \theta_0$ هي الذيل الأيمن. ويبدو منطقيا ، في هذه الحالة ، أن تتألف المنطقة الحرجة من قسمين متساويين يحتل أحدهما الذيل الأيمن بحجم $\frac{\alpha}{2}$ ويحتل الآخر الذيل الأيسر بحجم مساو $\frac{\alpha}{2}$ ، وبحيث يكون حجم المنطقة الحرجة بقسميها هو α. وسنرى في الفقرة القادمة أن هذه المنطقة الحرجة هي أفضل ما يمكن توافره في هذه الحالة.

(٦-٦) اختبارات نسبة الإمكانية المعمّمة

في تمهيد نيمان - بيرسون نبحث عن أفضل اختبار من بين الاختبارات التي يكون حجمها (أي حجم المنطقة الحرجة الموافقة للاختبار) α. وبمعنى آخر فإننا نضع قيدا معينا يحدد لنا صفا من الاختبارات ، وضمن هذا الصف يشكل التمهيد دليلا يرشدنا إلى أفضل اختبار. وفي الحالات التي لا يمكننا فيها تطبيق تمهيد نيمان - بيرسون أصلا ، يصبح من الضروري وضع قيود جديدة على صف الاختبارات التي تشملها ساحة المقارنة ونحاول عندئذ إيجاد أفضل اختبار من بين اختبارات هذا الصف المقيّد ، أو تبني طريقة أخرى أو مبدأ آخر للحصول على اختبار جيد ، وسنعرض ونناقش في هذه الفترة مثل هذا المبدأ الجديد. وبما أن أي طريقة لاختبار فرضيات مركبة ستتضمن حكما اختبار الفرضيات البسيطة كحالات خاصة فإننا سنقدم هذا المبدأ على أساس اختبار فرضيات مركبة.

لنفرض أن دالة التكرار لمتغير عشوائي X هي $f(x;\ \theta_1,...,\theta_k)$، أي أنه يحوي k من المعالم θ_1 ، ... ، θ_k. ولنرمز للفرضية المركبة التي نريد اختبارها على الشكل $H_0 : \theta_i = \theta'_i\ (i = 1,2,...,k)$ ، حيث يمكن أن ترمز θ'_i لقيمة عددية محددة أو أنها تبقى غير محددة، فمثلا، في حالة معلمتين θ_1 و θ_2 يمكن أن تحدد الفرضية H_0 قيمة θ_1 على أنها 10 ، مثلا ، وتترك θ_2 غير محددة، وفي هذه الحال يكون $\theta'_1 = 10$ بينما $\theta'_2 = \theta_2$.

وكتوضيح آخر نقول إنه يمكن أن تكون الفرضية H_0، في حالة معلمتين، على الشكل $\theta_1 = \theta_2$ ، أي أن $\theta'_1 = \theta_1$ و $\theta'_2 = \theta_1$. وهكذا تكون عبارة دالة التكرار (نستخدم مصطلح دالة التكرار للدلالة على دالة كثافة أو دالة احتمال وذلك وفقا لما إذا كان المتغير X مستمرا أو منفصلا ، على الترتيب) تحت الفرضية H_0 هي $L(\theta') = \prod_{i=1}^{n} f\ (x_i, \theta'_1, ..., \theta'_k)$ كما تكون دالة الإمكانية تحت الفرضية H_1 هي $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f\ (x_i, \theta_1, ..., \theta_k)$. لنرمز الآن بـ $\hat{\theta}'_i$ لتقدير الإمكانية العظمى لـ θ_i تحت الفرضية H_0 (وبالطبع فإن هذه التقديرات تقتصر على المعالم التي لم تحدد H_0 قيمة معينة لها) وبـ $\hat{\theta}_i$ لتقدير الإمكانية العظمى لِ θ_i تحت الفرضية H_1. ولنشكل النسبة :

$$\lambda = \frac{L(\hat{\theta}')}{L(\hat{\theta})} \qquad (٢٠)$$

وهي نسبة دالتي الإمكانية عندما نعوض في الدالة كل معلمة بتقديرها وفقا لمبدأ الإمكانية العظمى ، وبما أن هذه التقديرات دوال في x_1 ، ... ، x_n فستكون النسبة λ دالة في x_1 ، ... ، x_n ولا تحوي أي معلمة مجهولة. وبعبارة أخرى فإن λ إحصاء له توزيع احتمالي يمكننا ، نظريا على الأقل ، الحصول عليه بدءا من دالة التكرار المعروفة للمتغير X.

وإذا أمعنا النظر في النسبة λ نجد أن مقامها هو القيمة العظمى لدالة الإمكانية مأخوذ تحت الفرض بأن H_1 صحيحة بينما يمثّل بسطها القيمة العظمى لدالة الإمكانية

مأخوذة تحت الفرض بأن H_0 صحيحة، أي بعد أن نكون قد قيّدنا بعض أو كل المعالم وفقا لمعطيات الفرضية الابتدائية H_0. ومن الواضح إذن أنه لا يمكن للبسط أن يتجاوز المقام في قيمته، وبالتالي فإن λ تفترض بالضرورة قيما بين الصفر والواحد. وكما نعلم فإن دالة الإمكانية تعطي الكثافة الاحتمالية (أو الاحتمال في حالة متحول منفصل X) عند النقطة $(x_1,...,x_n)$ من فضاء المعاينة. وإذا كانت λ قريبة من الواحد نستنتج أن الكثافة الاحتمالية (أو الاحتمال) لنقطة عينة لا يمكنها أن تزداد كثيرا إذا سمحنا للمعالم أن تفترض قيما غير تلك التي حددتها H_0. وهكذا فإن قيمة λ القريبة من الواحد تؤدي بالبداهة إلى قدر كبير من الاعتقاد بأن الفرضية H_0 هي فرضية معقولة. ولكن إذا كانت قيمة λ قريبة من الصفر فإن ذلك يتضمن أن الكثافة الاحتمالية (أو الاحتمال) لنقطة عينة تحت الفرضية H_0 منخفضة جدا بالمقارنة مع ما ستكون عليه تحت قيم أخرى للمعالم لا تسمح بها H_0. ولذلك فإن قيم λ القريبة من الصفر تدعو إلى قدر كبير من الاعتقاد بأن الفرضية H_0 مريبة. وإذا اعتبرنا القيم المتزايدة لِ λ موافقة لدرجات متزايدة من الاعتقاد بصحة الفرضية H_0 فيمكن استخدام الإحصاء λ كإحصاء اختبار، أي استخدامه لاختبار الفرضية H_0، والقيم الصغيرة لِ λ تؤدي إلى رفض الفرضية H_0.

لنفترض الآن أن H_0 صحيحة وأننا استطعنا إيجاد دالة تكرار الإحصاء λ ولتكن $g(\lambda)$. ولنفترض أيضا أن $g(\lambda)$ لا يعتمد على أي من المعالم المجهولة فعندئذ يمكن إيجاد قيمة لِ λ ولنرمز لها بِ λ_0 بحيث يكون:

$$\int_0^{\lambda_0} g(\lambda)\,d\lambda=\alpha \qquad (٢١)$$

وهكذا تكون المنطقة الحرجة ذات الحجم α من أجل اختبار H_0 بواسطة الإحصاء λ هي الفترة $0 \le \lambda \le \lambda_0$ ونلخص بكتابة.

اختبارات نسبة الإمكانية المعمّمة

لاختبار الفرضية H_0، سواء أكانت بسيطة أم مركبة، نستخدم الإحصاء λ المعرف في (٢٠) ونرفض H_0 إذا، وفقط إذا، حققت قيمة λ المتراجحة $\lambda \le \lambda_0$ حيث λ_0 معرفة بالعلاقة (٢١).

ويوجد قدر كبير من التشابه بين الطريقة المستخدمة للحصول على أفضل اختبار وطريقة اختبار نسبة الإمكانية، فكلاهما يستخدم نسبة دالتي إمكانية كأساس لاتخاذ قرار. ويمكن ملاحظة هذا التشابه بمقارنة (٥) و (٦) مع (٢٠).

ومع أن تبرير استخدام الإحصاء λ لاختبار فرضيات قائم إلى حد كبير على أسس من الفطرة أو البداهة، إلا أنه يمكن البرهان على أن اختبارات نسبة الإمكانية تتمتع بعدد من الخواص المرغوبة خاصة في حالة عينات كبيرة الحجم.

مــثال (٣)

أخذنا عينة $X_1,\dots,X_n$ من توزيع طبيعي متوسطه θ وتباينه الواحد والمطلوب اختبار الفرضية $H_0\colon \theta = \theta_0$ ضد البديل $H_1\colon \theta \ne \theta_0$.

لدينا هنا:

$$f(x;\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

و

$$L(\theta) = (2\pi)^{-\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}$$

ويكفي أن نجعل $\log L(\theta)$ في نهايته العظمى. ولهذا الغرض نكتب:

$$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)$$

ومنه $\hat{\theta}=\bar{x}$ وبالتالي:

$$L(\hat{\theta})=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

ولا تترك H_0 في هذه الحالة معالم غير محددة لتقديرها ولذلك نكتب:

$$L(\hat{\theta}')=L(\theta')=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2}\text{ ،}$$

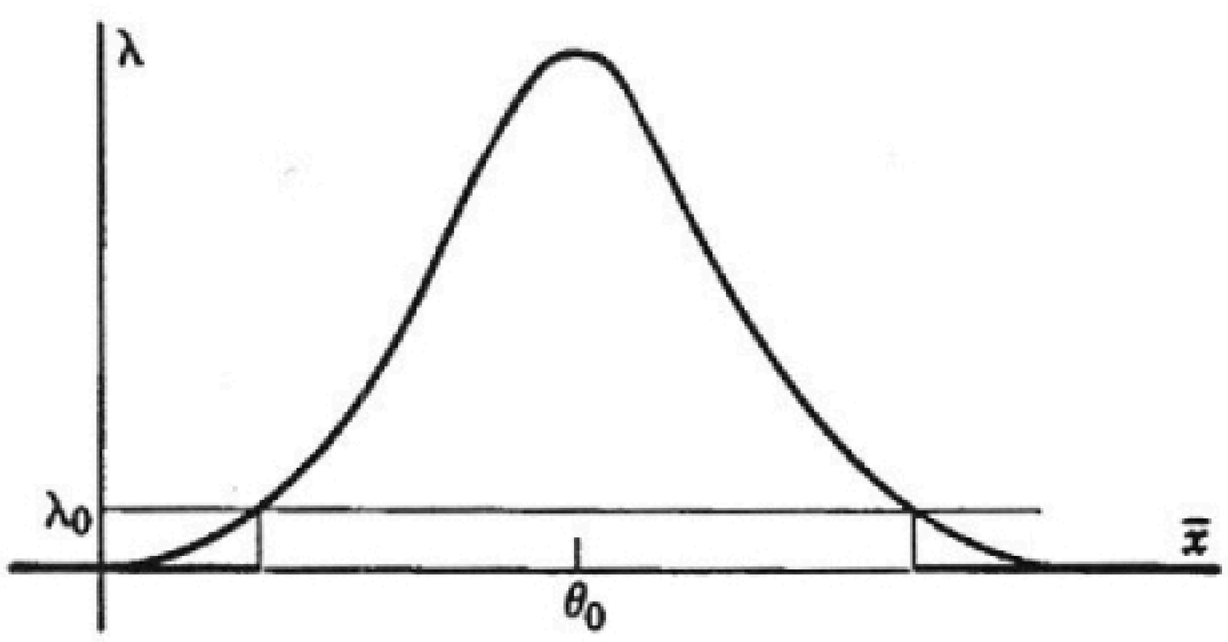
وهكذا تصبح λ كما عرفناها في (٢٠) على الشكل:

$$\lambda=e^{-\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]}$$

وبعد التبسيط نجد:

$$\lambda=e^{-\frac{n}{2}(\bar{x}-\theta_0)^2} \qquad (٢٢)$$

وبما أن n و θ_0 ثابتان فإن (٢٢) هي علاقة بين λ و $\bar{x}$ مما يمكننا من إيجاد المنطقة الحرجة دون معرفة $g(\lambda)$. ويبين الشكل رقم (٦-٥) الرسم البياني للعلاقة (٢٢). وكل قيمة λ توافقها قيمتان لـ $\bar{x}$ متناظرتان بالنسبة للنقطة $\bar{x}=\theta_0$. وسيؤدي هذا إلى وجود قيمتين حرجتين لِ $\bar{x}$ توافقان القيمة الحرجة λ_0 لِـ λ.



الشكل رقم (٦-٥).

ويبين الشكل رقم (٦-٥) أيضا أنه كلما إزدادت λ صغرا كلما ازدادت القيمة المطلقة $|\bar{x}-\theta_0|$ كبرا. وهذا يعني أن المنطقة الحرجة $0\le\lambda\le\lambda_0$ ذات الحجم α يوافقها بدلالة $\bar{x}$ ، منطقتان حجم كل منهما $\frac{\alpha}{2}$ وتحتل أحدهما الذيل الأيمن بينما تحتل الأخرى الذيل الأيسر من دالة كثافة $\bar{X}$. وهكذا فإن المنطقة الحرجة ذا الحجم $\alpha=0.05$

الموافقة لاختبار نسب الإمكانية تكافئ ذيلي توزيع $\overline{X}$ اللذين تحددهما المتراجحة $|\overline{x}-\theta_0|\sqrt{n}>1.96$. وقد أشرنا إلى هذه النتيجة في نهاية الفقرة السابقة.

وقد رأينا وفقا لتمهيد نيمان - بيرسون أنه يمكن الوصول إلى أفضل اختبار، فقط من أجل فرضية بديلة H_1 من النوع $\theta_1>\theta_2$ أو $\theta_1<\theta_0$، وهكذا نجد أن اختبار نسبة الإمكانية، في مثالنا هنا، لا يمكن أن يشكل أفضل اختبار ضمن ساحة كل الاختبارات ذات الحجم α.

مـــثال (٤)

لتكن $X_1,\ldots,X_n$ عينة من توزيع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 ونرغب في اختبار الفرضية $H_0\colon \mu=\mu_0$ ضد البديل $H_1\colon \mu\neq\mu_0$. وهي فرضية مركبة لأنها أغفلت المعلمة σ^2 وتركتها بدون تحديد.

لدينا هنا:

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \quad , \quad -\infty<x<\infty$$

ودالة الإمكانية هي:

$$L(\mu,\sigma^2)=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{٢٣}$$

ونعلم من المثال (١٢) من الفصل الرابع أن تقديري الإمكانية العظمى للمعلمتين μ، σ^2 هما:

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\Sigma x_i=\overline{x} \tag{٢٤}$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\Sigma(x_i-\overline{x})^2 \tag{٢٥}$$

وبتبديل هاتين القيمتين في L نجد:

$$L(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)=\left[\frac{1}{(2\pi/n)\Sigma(x_i-\overline{x})^2}\right]^{n/2} e^{-n/2} \tag{٢٦}$$

ولحساب تقديرات الإمكانية العظمى تحت الفرضية H_0 نضع $\mu = \mu_0$ ويبقى علينا تقدير σ^2 وفي هذه الحالة نجد أن قيمة σ^2 التي تجعل $L_0(\sigma^2)$ أعظم ما يمكن هي :

$$\widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\Sigma(x_i - \mu_0)^2 \tag{٢٧}$$

وبتعويضها في L_0 نجد :

$$L_0(\widetilde{\sigma}^2) = \left[\frac{1}{(2\pi / n)\Sigma(x_i - \mu_0)}\right]^{n/2} e^{-n/2} \tag{٢٨}$$

والنسبة λ المعرفة في (٢٠) هي في هذه الحالة :

$$\lambda = \left[\frac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{\Sigma(x_i - \mu_0)}\right]^{n/2} \tag{٢٩}$$

والخطوة التالية هي الحصول على توزيع λ تحت الفرضية H_0 واستخدام هذا التوزيع لتحديد عدد λ_0 بحيث يكون حجم المنطقة الحرجة $0 < \lambda < \lambda_0$ مساويا للحجم الذي نرغبه α.

ويتفق أن يكون من السهل الحصول على توزيع λ في هذه الحالة. إذ يمكن كتابة مجموع المربعات في المقام على الشكل :

$$\Sigma(x_i - \mu_0)^2 = \Sigma(x_i - \overline{x})^2 + n(\overline{x} - \mu_0)^2 \tag{٣٠}$$

أي يمكن كتابة λ على الشكل :

$$\lambda = \left\{\frac{1}{1 + \left[n(\overline{x} - \mu_0)^2 / \Sigma(x_i - \overline{x})^2\right]}\right\}^{n/2}$$

وبالاستناد إلى ما رأيناه في الفقرة (٣-٥) يمكن كتابة λ بدلالة التوزيع t بـ $(n\text{-}1)$ درجة من الحرية ، فتأخذ تحت الفرضية H_0 الشكل :

$$\lambda = \left\{\frac{1}{1 + \dfrac{t^2}{n-1}}\right\}^{n/2} \tag{٣١}$$

حيث $t = \dfrac{(\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s}$ ، و s الانحراف المعياري للعينة.

وليس ضروريا حساب توزيع λ طالما أنها دالة متناقصة في الكمية t^2، ويمكن إذن اعتماد t^2 كإحصاء اختبار بدلا من λ. وبما أن $t^2 = 0$ عـــندما $\lambda = 1$ وأن $t^2 \to \infty$ عندما $\lambda \to 0$ فإن المنطقة الحرجة $\lambda < \lambda_0$ تكافئ منطقة حرجة من النوع $t^2 > A$ حيث تتحدد A بدلالة λ_0 من العلاقة (٣١). والمنطقة الحرجة ذات الحجم α التي يحددها اختبار نسبة الإمكانية تتألف من جزئين حجم كل منهما $\alpha/2$ يتوضع أحدهما في الذيل الأيمن بينما يتوضع الآخر في الذيل الأيسر للتوزيع t بـ $(n\text{-}1)$ درجة من الحرية، أي أنها تتألف من الفترتين:

$$t < -t_{\alpha/2} \text{ و } t > t_{\alpha/2}$$

حيث $t_{\alpha/2}$ هي النقطة التي يقع إلى يمينها $\frac{\alpha}{2}$ من المساحة تحت دالة كثافة التوزيع t بـ $(n - 1)$ درجة من الحرية، أي المئين $1-\frac{\alpha}{2}$ لهذا التوزيع.

ولاختبار الفرضية H_0 عند مستوى الأهمية α نحسب إذن الكمية:

$$t=\frac{(\bar{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{s} \qquad (٣٢)$$

فإذا وقعت بين $-t_{\alpha/2}$ و $t_{\alpha/2}$ كما نجدها من جدول التوزيع t بعدد $n\text{-}1$ من درجات الحرية نقبل الفرضية H_0، وفيما عدا ذلك نرفضها.

والجدير بالملاحظة هو الصلة بين هذا الاختبار والتقدير بفترة للمتوسط μ، إذ نعلم من الفصل الخامس أن $(1\text{-}\alpha)$ فترة ثقة لـ μ هي $\bar{x}\pm t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$ أي مجموعة قيم μ التي يكون من أجلها:

$$-t_{\alpha/2}\le\frac{(\bar{x}-\mu)\sqrt{n}}{s}\le t_{\alpha/2} \qquad (٣٣)$$

واختبار H_0 عند مستوى الأهمية α يكافئ إذن الاختبار التالي: نحسب $(1\text{-}\alpha)$ فترة ثقة للمتوسط فإذا وقعت μ_0 ضمن فترة الثقة نقبل H_0 وإذا لم تقع ضمن فترة الثقة نرفض الفرضية H_0.

مـــثال (٥) : اختبار حول تساوي متوسطي مجتمعين طبيعيين

كثيرا ما يكون من الضروري مقارنة متوسطين ، فلاختيار الطريقة الأفضل من بين طريقتين لتصنيع مُنتج معين أو طريقتين لتعليم مادة معينة أو طريقتين لعلاج علّة معينة إلخ ، لا بد من مقارنة متوسطي الإنتاج (أو الأداء) في الطريقتين. ولتقرير ما إذا كانت سلالة جديدة من القمح أفضل من سلالة قيد الاستخدام ، لابد من مقارنة متوسطي إنتاجية السلالتين عند زراعتهما تحت شروط متماثلة. وبصورة عامة ، يمكن عرض المسألة على الشكل التالي :

لدينا مجتمعان طبيعيان لهما التباين نفسه σ^2 ، ومتوسط المجتمع الأول μ_1 ومتوسط المجتمع الثاني μ_2 وبالاستناد إلى عينة $X_1,...,X_m$ حجمها m من المجتمع الأول وعينة مستقلة عن الأولى Y_n ، ... ، Y_1 ، حجمها n من المجتمع الثاني ، نريد اختبار الفرضية :

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \text{ضد البديل} \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

وفضاء المعالم هو فضاء ذو ثلاثة أبعاد (μ_1,μ_2,σ^2) إذ يتحدد التوزيع المشترك للمتغيرين X و Y تماما بتحديد قيم لكل من المتوسطين μ_1 و μ_2 وتحديد قيمة للتباين المشترك σ^2. ولكن تحت الفرضية H_0 يصبح فضاء المعالم ثنائي الأبعاد ، إذ لو فرضنا $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ فإن التوزيع المشترك للمتغيرين X و Y يتحدد تماما بتحديد قيمة μ وقيمة σ^2. ودالة الإمكانية هي :

$$L(\mu_1,\mu_2,\sigma^2; x_1,...x_m, y_1,...,y_n) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}(m+n)} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_i^m (x_i-\mu_1)^2 + \sum_j^n (y_j-\mu_2)^2\right]\right\}$$

$$logL = -\frac{1}{2}(m+n)log(2\pi) - \frac{1}{2}(m+n)log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_i^m (x_i-\mu_1)^2 + \sum_j^n (y_j-\mu_2)^2\right]$$

وبحل المعادلتين $\frac{\partial logL}{\partial \mu}=0$ و $\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2}=0$ نحصل على تقديرات الإمكانية العظمى:

$$\hat{\mu}_1=\overline{X} \text{ ، } \hat{\mu}_2=\overline{Y} \text{ ، } \hat{\sigma}^2=\frac{1}{m+n}\left[\sum_i^m (X_i-\overline{X})^2+\sum_j^n (Y_j-\overline{Y})^2\right]$$

وباستخدام الرمز S_p^2 المذكور في الفقرة (٣-٥) نجد أن تقدير الإمكانية العظمى للتباين المشترك σ^2 هو:

$$\hat{\sigma}^2=(m+n-2)S_p^2/(m+n) \tag{٣٤}$$

وبالتعويض في الدالة L أعلاه نجد:

$$L(\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2,\hat{\sigma}^2)=\left[\frac{m+n}{2\pi(m+n-2)S_p^2}\right]^{\frac{m+n}{2}} e^{-\frac{1}{2}(m+n)} \tag{٣٥}$$

وتحت الفرضية H_0 تصبح دالة الإمكانية:

$$L(\mu, \sigma^2; x_1,\ldots,x_m, y_1,\ldots,y_n) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}(m+n)} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_i^m (x_i-\mu)^2+\sum_j^n (y_j-\mu)^2\right]\right\}$$

وتصبح تقديرات الإمكانية العظمى للمتوسط المشترك μ وللتباين المشترك σ^2 كما يلي:

$$\hat{\mu}=\frac{1}{m+n}\left(\sum_i^m X_i+\sum_j^n Y_j\right)=\frac{m\overline{X}+n\overline{Y}}{m+n} \tag{٣٦}$$

$$\hat{\hat{\sigma}}^2=\frac{1}{m+n}\left[\sum_i^m (X_i-\hat{\mu})^2+\sum_j^n (Y_j-\hat{\mu})^2\right]$$

وباستخدام المطابقة (١٢) من الفقرة (٢-٢) يمكن كتابة:

$$\hat{\hat{\sigma}}^2=\frac{1}{m+n}\left[\sum_i^m (X_i-\overline{X})^2+m(\overline{X}-\hat{\mu})^2+\sum_j^n (Y_j-\overline{Y})^2+n(\overline{Y}-\hat{\mu})^2\right]$$

وباستخدام الرمز S_p^2 والقيام ببعض العمليات الحسابية البسيطة نجد:

$$\hat{\hat{\sigma}}^2=\frac{1}{m+n}\left[(m+n-2)S_p^2+\frac{mn}{m+2}(\overline{X}-\overline{Y})^2\right] \tag{٣٧}$$

وبالتعويض في L نجد:

$$L(\hat{\mu},\hat{\hat{\sigma}}^2)=\left\{\frac{m+n}{2\pi\left[(m+n-2)S_p^2+\frac{mn}{m+n}(\bar{X}-\bar{Y})^2\right]}\right\}^{\frac{m+n}{2}} e^{-\frac{1}{2}(m+n)} \qquad (٣٨)$$

وأخيرا:

$$\lambda=\frac{L(\hat{\mu},\hat{\hat{\sigma}}^2)}{L(\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2,\hat{\sigma}^2)}=\frac{1}{\left[1+\frac{\frac{mn}{m+n}(\bar{X}-\bar{Y})^2}{(m+n-2)S_p^2}\right]^{\frac{m+n}{2}}}$$

ولكن عندما يكون $\mu_1=\mu_2$ فإن المقدار $\frac{mn}{m+n}(\bar{X}-\bar{Y})^2/S_p^2$ يساوي مربع المتغير t كما رأينا في (٢٥) من الفقرة (٣-٥) وهكذا يكون:

$$\lambda=\frac{1}{\left[1+\frac{t^2}{m+n-2}\right]^{\frac{m+n}{2}}} \qquad (٣٩)$$

حيث يتوزع t وفق توزيع ستيودنت بعدد $m+n-2$ من درجات الحرية. وهنا، كما في الفقرة السابقة، نجد أن المنطقة الحرجة الموافقة لقيم صغيرة للنسبة λ تقابلها قيم كبيرة لِـ t^2. ومنطقة الرفض ذات الحجم α هي إذن $t<-t_{\alpha/2}$ أو $t>t_{\alpha/2}$.

وإذا أردنا اختبار الفرضية $H_0: \mu_1=\mu_2$ ضد البديل $H_1: \mu_1<\mu_2$ نأخذ منطقة الرفض كلها على جانب واحد يدعم H_1 وهي هنا $t<-t_\alpha$ أي قيم صغيرة للمتغير t. وفي المقابل إذا كان المطلوب اختبار $H_0: \mu_1=\mu_2$ ضد البديل $H_1: \mu_1>\mu_2$ تؤخذ منطقة الرفض كلها في الذيل الأيمن ونرفض H_0 إذا كان $t>t_\alpha$، حيث t_α هو المئين $100(1-\alpha)$ للتوزيع t بعدد $m+n-2$ من درجات الحرية.

مـــثال (٦) : اختبار حول تباين توزيع طبيعي

لتكن $X_1,...,X_n$ عينة من توزيع طبيعي متوسطه θ وتباينه σ^2 والمطلوب اختبار الفرضية $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ ضد البديل $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ وهي فرضية مركبة باعتبارها تغفل المعلمة θ.

دالة الإمكانية تحت H_1 هي :

$$L(\theta,\sigma^2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma(x_i-\theta)^2}$$

وبوضع $\sigma^2 = \sigma_0^2$ نجد أن دالة الإمكانية تحت H_0 هي :

$$L_0(\theta) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\Sigma(x_i-\theta)^2}$$

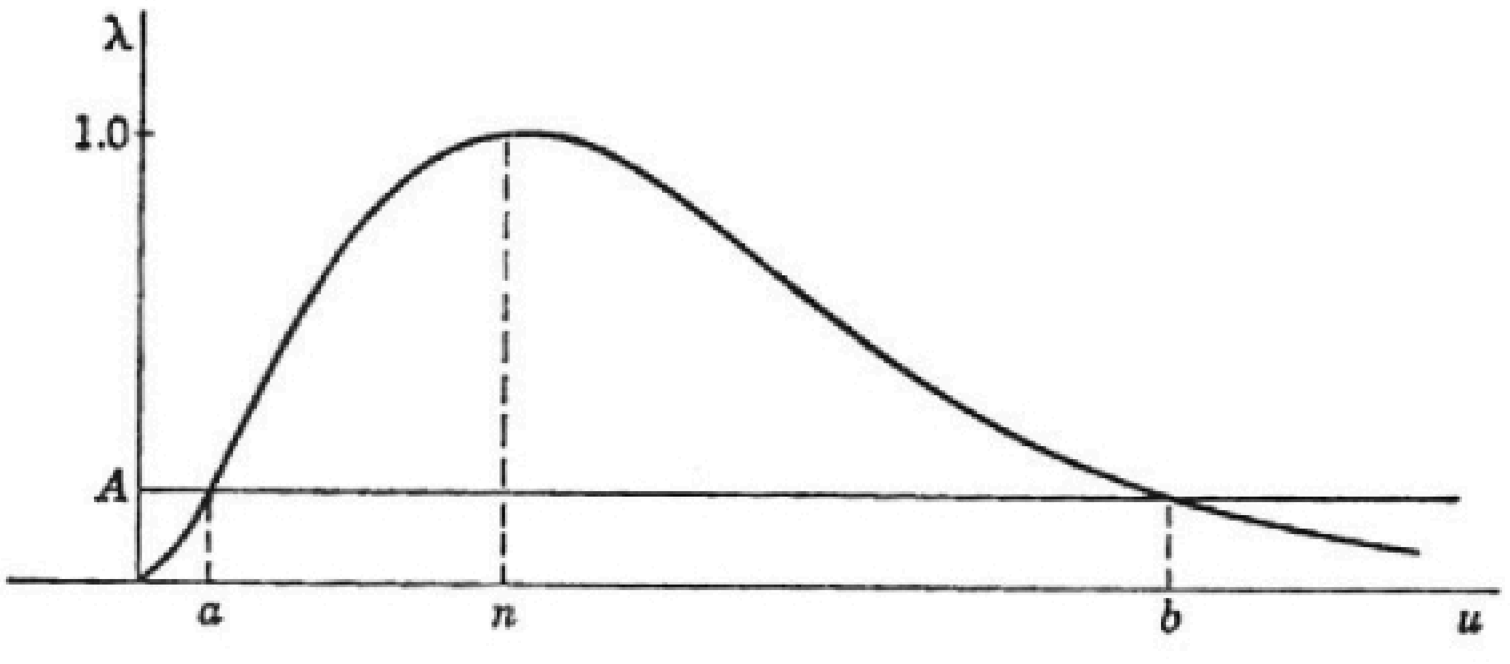
وبحساب النسبة λ بطريقة مشابهة لما وجدناه في المثال السابق نحصل على النتيجة التالية :

$$\lambda = \left(\frac{u}{n}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2}(u-n)} \qquad (٤٠)$$

حيث :

$$u = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{\sigma_0^2} \qquad (٤١)$$

ونعلم أن توزيع u هو التوزيع χ^2 بـ $(n\text{-}1)$ درجة من الحرية مما يسمح لنا بحساب توزيع λ. إلا أنه يمكن استخدام u كإحصاء اختبار، إذ لو رسمنا بيانيا العلاقة (٤٠) لوجدنا خطا بيانيا من النوع المبين في الشكل رقم (٦-٦).



الشكل رقم (٦-٦).

ويتضح من هذا الشكل أن المنطقة الحرجة $0 < \lambda < \lambda_0$ توافق منطقة حرجة بدلالة u مؤلفة من جزئين هما $0 < u < a$ و $b < u < \infty$ حيث a و b هما قيمتا u الموافقتين لِ $\lambda = \lambda_0$. ونختار عادة هاتين النقطين بحيث يكون حجم كل من جزئي المنطقة الحرجة هو $\frac{\alpha}{2}$. ولاختبار H_0 إذن نحسب الكمية u المعرفة في (٤١) ونقبل H_0 إذا وقعت هذه الكمية بين $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$ و $\chi^2_{\alpha/2}$ كما نحصل عليهما من جدول التوزيع χ^2، ونرفضها فيما عدا ذلك.

وهنا أيضا، إذا كانت الفرضية البديلة $H_1:\sigma^2 < \sigma_0^2$ أو $H_1:\sigma^2 > \sigma_0^2$ فإن الاختبار الموافق يكون اختبارا وحيد الذيل أي أن المنطقة الحرجة الموافقة لكل من الاختبارين هما، على الترتيب، $u < \chi^2_{1-\alpha}$ و $u > \chi^2_{\alpha}$.

مثال (٧) : اختبار تساوي تباينين

لتكن $X_1,\ldots,X_m$ عينة حجمها m من توزيع طبيعي متوسطه μ_1 وتباينه σ_1^2، و Y_1، ...، Y_n عينة حجمها n من توزيع طبيعي متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2، والمطلوب اختبار الفرضية $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ ضد البديل $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

ودالة الإمكانية تحت H_1 هي :

$$L(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2)=(2\pi)^{\frac{1}{2}(n+m)}\left(\sigma_1^2\right)^{-\frac{m}{2}}\left(\sigma_2^2\right)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{x_j-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{y_j-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

وتحت الفرضية H_0 يصبح :

$$L_0(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)=\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{1}{2}(m+n)}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{j=1}^{m}(x_j-\mu_1)^2+\sum_{j=1}^{n}(y_j-\mu_2)^2\right]}$$

وبطريقة مماثلة لما رأيناه في الأمثلة السابقة نحسب النسبة λ فنجد :

$$\lambda=\frac{\left\{\dfrac{m+n}{2\pi\left[\Sigma(x_j-\overline{x})^2+\Sigma(y_j-\overline{y})^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}(m+n)}}{\left[\dfrac{m}{2\pi\Sigma(x_j-\overline{x})^2}\right]^{\frac{1}{2}m}+\left[\dfrac{n}{2\pi\Sigma(y_j-\overline{y})^2}\right]^{\frac{1}{2}n}} \qquad (٤٢)$$

ويمكن بالاستفادة من الفقرة (٣-٦) أن نضع λ على الشكل :

$$\lambda=\frac{(m+n)^{\frac{1}{2}(m+n)}}{m^{\frac{1}{2}m}\,n^{\frac{1}{2}n}}\;\frac{\left(\dfrac{m-1}{n-1}F\right)^{\frac{1}{2}m}}{\left(1+\dfrac{m-1}{n-1}F\right)^{\frac{1}{2}(m+n)}} \qquad (٤٣)$$

حيث F هي نسبة تبايني العينتين أي :

$$F=\frac{(n-1)\,\Sigma(x_j-\overline{x})^2}{(m-1)\,\Sigma(y_j-\overline{y})^2} \qquad (٤٤)$$

وتوزيع الإحصاء المعرف في (٤٤) هو التوزيع F بـ $(m\text{-}1)$ و$(n\text{-}1)$ درجة من الحرية وذلك تحت الفرضية H_0. وبرسم الخط البياني للعلاقة (٤٣) نجد أن المنطقة الحرجة $\lambda < \lambda_0$ توافق منطقة مؤلفة من جزئين يحتلان الذيلين الأيمن والأيسر لدالة الكثافة F بـ $(m\text{-}1)$ و$(n\text{-}1)$ درجة من الحرية. ومن المتعارف عليه أن يكون حجم كل من الذيلين $\frac{\alpha}{2}$ (مع أن هذا ليس بالضرورة أفضل اختيار) وذلك نظرا لسهولة تحديد المنطقة الحرجة بالاستعانة بجداول التوزيع F.

ولاختبار الفرضية $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ ضد البديل $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ عند مستوى الأهمية α نحسب أولا إحصاء الاختبار F المعرف بالعلاقة (٤٤) فإذا وقع بين $F_{\alpha/2}$ و $F_{1-\alpha/2}$ كما نجدها من جداول التوزيع F نقبل الفرضية H_0 وفيما عدا ذلك نرفضها.

ونضيف هنا، أيضا، بأنه يمكن استخدام الاختبارات وحيدة الذيل إذا كانت الفرضية البديلة $H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ أو $H_1: \sigma_2^2 < \sigma_1^2$.

مـــثال (٨)[*] : اختبار تساوي أكثر من تباينين

كتعميم للمثال السابق لنفرض الآن k من التوزيعات متوسطاتها هي μ_1، μ_2، ...، μ_k وتبايناتها هي σ_1^2 ، σ_2^2 ، ...، σ_k^2 ولنأخذ من كل توزيع عينة، أي لنأخذ k من العينات حجومها n_1، n_2، ...، n_k والمطلوب اختبار الفرضية :

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2$$

وسنرمز هنا بـ x_{ij} للملاحظة j من العينة i، وهكذا تتحول j من 1 إلى n_i حيث n_i هو حجم العينة المأخوذة من المجتمع i، وتتحول i من 1 إلى k. ومجموع الملاحظات المأخوذة في كافة العينات هو $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. ودالة كثافة X_{ij} هي :

$$f(x_{ij};\mu_i,\sigma_i^2) = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_{ij}-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2} \quad -\infty < x_{ij} < \infty$$

ودالة الإمكانية تحت H_1 هي :

$$L = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma_1^{-n_1} \ldots \sigma_k^{-n_k} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\frac{x_{ij}-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2} \qquad (٤٥)$$

وتحت الفرضية H_0 تصبح :

---

[*] للقراءة فقط.

$$L_0 = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\mu_i)^2} \qquad (٤٦)$$

حيث σ^2 هو القيمة المشتركة للكميات σ_i^2. ولحساب تقديرات الإمكانية العظمى في كل من الحالتين نكتب:

$$\frac{\partial logL}{\partial \mu_i} = \frac{1}{\sigma_i^2}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \mu_i)$$

$$\frac{\partial log\, L_0}{\partial \sigma_i} = -\frac{n_i}{\sigma_i} + \frac{1}{\sigma_i^3}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \mu_i)^2$$

$$\frac{\partial log\, L_0}{\partial \mu_i} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \mu_i)$$

$$\frac{\partial log\, L_0}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \mu_i)^2$$

ومنه نجد أن $\hat{\mu}_i = \overline{X}_i$ ، $i = 1,...,k$ ، وذلك في حالتي L_0, L.

ومن المعادلتين الثانية والرابعة نجد، على الترتيب:

$$\hat{\sigma}_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i}\frac{(x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{n_i} = s_i'^2 \quad (i = 1,2,...,k) \qquad (٤٧)$$

و

$$\tilde{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{(x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{n} = \sum_{i=1}^{k}\frac{n_i s_i'}{n} \qquad (٤٨)$$

بالتعويض عن هذه التقديرات في (٤٥) و (٤٦) نجد:

$$\hat{L} = \frac{e^{-n/2}}{(2\pi)^{n/2} S_1'^{n_1} .. S_k'^{n_k}}$$

وكذلك:

$$\hat{L}_0 = \frac{e^{-n/2}}{(2\pi)^{n/2}\left(\frac{n_1 S_1'^2 + ... + n_k S_k'^2}{n}\right)^{n/2}}$$

ونسبة الإمكانية λ هي:

$$\lambda = \frac{S_1'^{n_1} \ldots S_k'^{n_k}}{\left(\frac{n_1 S_1'^2 + \ldots + n_k S_k'^2}{n} \right)^{n/2}} \tag{٤٩}$$

وإيجاد توزيع λ هو مسألة معقدة هنا، ولذلك لابد من اللجوء إلى تقريب مناسب لتوزيع λ. وإذا كانت قيم n_i كبيرة بصورة كافية فيمكن البرهان على أن توزيع الكمية λ log_e 2 - هو بصورة تقريبية التوزيع χ^2 بـ $(k-1)$ درجة من الحرية، مما يسمح لنا بإيجاد القيم الحرجة لِـ λ مستخدمين جدول التوزيع χ^2. ونرفض الفرضية عند مستوى الأهمية α إذا كان λ log_e 2 - أكبر من χ^2_α.

وقد بينت دراسات تتعلق بدقة التقريب المذكور أعلاه أنه يمكن الوصول إلى اختبار أدق، خاصة من أجل قيم صغيرة نسبيا لـِ n_i، وذلك بإجراء بعض التعديلات على (٤٩). ونظرا لأهمية مسألة تجانس التباينات في كثير من التطبيقات الإحصائية فمن المفيد أن نستعرض هذا الاختبار الأكثر دقة فيما يلي:

إن التعديل الواقع على (٤٩) يتلخص في اعتبارنا لكمية بديلة هي:

$$\frac{-2\log\mu}{1+\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i-1}-\frac{1}{n-k}\right)/3(k-1)} \tag{٥٠}$$

كإحصاء اختبار توزيعه هو التوزيع χ^2 بـ $(k-1)$ درجة من الحرية، حيث μ معرفة بالعلاقة:

$$\mu=\frac{\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{n_i s_i'^2}{n_i-1}\right)^{\frac{n_i-1}{2}}}{\left(\frac{\Sigma n_i s_i'^2}{\Sigma(n_i-1)}\right)^{\Sigma(n_i-1)/2}} \tag{٥١}$$

وكتوضيح عددي لهذا الاختبار لنأخذ دراسة ما إذا كان تغير البضاعة الناتجة في مصنع معين والتي نفرض أنها تتبع التوزيع الطبيعي قد بقي ثابتا خلال فترة خمسة

أسابيع، وذلك بالاستناد إلى قيم تباينات خمس عينات حجم كل منها 5 مأخوذة واحدة في كل أسبوع. ولنفرض أن قيم هذه التباينات كانت كما يلي: $s_1'^2=237$ ، $s_2'^2=320$ ، $s_3'^2=853$ ، $s_4'^2=296$ ، $s_5'^2=141$ ، ولدينا هنا $n_i=5$ ، $(i=1,...,5)$ ؛ وبالتعويض في (٤٥) نجد:

$$\mu = \frac{\prod\limits_{i=1}^{5}\left(\frac{5}{4}s_i^2\right)^2}{\left(\frac{5\Sigma s_i^2}{20}\right)^{10}} = \frac{5^{10}\Pi\left(s_i^2\right)^2}{\left(\Sigma s_i^2\right)^{10}}$$

و

$$\log\mu = 2\,\Sigma\log s_i^2 - 10\,\log\frac{\Sigma s_i^2}{5} = -1.844$$

وبالتعويض في (٤٤) نجد القيمة 3.35، ومن جدول التوزيع χ^2 بـ k-4 = 1 درجات من الحرية نجد أن $x_{.05}^2=9.5$. وبما أن $9.5 > 3.35$ نقول إن المعلومات الإحصائية المتوافرة لنا لا تقيم دليلا كافيا على عدم وجود التجانس في البضاعة الناتجة. واختبار نسبة الإمكانية التقريبي غير المحسَّن، أي λ log_e 2 - يعطي القيمة 4.6 مما يوصل إلى النتيجة نفسها. والفارق غير البسيط بين القيمة الناتجة عن العلاقة (٥٠) وهذه الكمية يعود إلى أن قيم n_i صغيرة في هذا المثال.

وكون التوزيع التقريبي لـ λ log 2- هو التوزيع χ^2 بـ k-1 درجة من الحرية ليس شيئا خاصا بمسألة التجانس المطروحة في المثال الأخير وإنما هي نتيجة عامة. إذ يمكن البرهان، بصورة عامة، وتحت شروط بسيطة تتعلق بدوال الكثافة أن توزيع الإحصاء λ log 2- ينتهي إلى التوزيع χ^2 عندما ينتهي حجم العينة إلى اللانهاية.

وهكذا فإنه من أجل عينات كبيرة الحجم يقدم اختبار نسبة الإمكانية المعممة وبمساعدة التوزيع χ^2 حلا عاما لمسألة اختبار فرضيات إحصائية تتعلق بمعالم دوال

الكثافة. ولكن السؤال الباقي هو ما إذا كانت اختبارات نسبة الإمكانية المعممة جيدة من وجهة نظر قوة الاختبار. وتبين الدراسات المتعلقة بهذا الموضوع أنه عندما لا يتوافر الاختبار الأفضل المعطى بتمهيد نيمان – بيرسون وما يتفرع عنها، فإن اختبارات نسبة الإمكانية المعممة تكون مكافئة على الغالب لاختبارات تتمتع بخواص جيدة من وجهة نظر قوة الاختبار، خاصة من أجل عينات كبيرة الحجم.

وهكذا فإنه عندما لا يتوافر أفضل اختبار، يكون اللجوء إلى اختبار نسبة الإمكانية أمرا سليما، شريطة أن يكون حجم العينة المستخدمة كبيرا بصورة كافية.

(٦–٧) تمارين

١– لنفرض أنك تريد اختبار الفرضية $H_0: \mu = 2$ مقابل الفرضية $H_1: \mu = 1$ لتوزيع بواسون مستخدما عينة حجمها $n = 2$. اقترح الجزء من فضاء المعاينة الذي يمكن اتخاذه كمنطقة رفض. علّل إجابتك.

٢– ما هو حجم الخطأ من النوع II إذا اخترنا $\alpha = 0.16$ كحجم للخطأ من النوع الأول عند اختبار الفرضية $H_0: \mu = 7$ مقابل الفرضية $H_1: \mu = 6$ في توزيع طبيعي انحرافه المعياري $\sigma = 2$ وذلك باستخدام عينة حجمها $n = 25$ واتخاذ القيم الكبيرة للمتوسط $\bar{X}$ كمنطقة رفض؟

٣– عند اختبار الفرضية $H_0: \mu = 20$ في توزيع طبيعي ما هو احتمال قبولك للفرضية H_0 عندما تكون القيمة الفعلية للمتوسط هي $\mu = 20 + \frac{\sigma}{2}$، وذلك بالاعتماد على عينة حجمها $n = 9$ واتخاذ منطقة رفض هي ذيلان لتوزيع متوسط العينة $\bar{X}$ حجم كل منهما 0.025؟

٤- ارسم دالة القوة بتحديد عدة نقاط منها وذلك لاختبار الفرضة $H_0:\ \mu = 0$ مستخدما ذيلي توزيع المتوسط $\bar{X}$ بحجم 0.025 لكل منهما وذلك في حالة توزيع طبيعي انحرافه المعياري $\sigma = 1$ وحجم العينة $n = 4$؟

٥- إذا كان X يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بانحراف معياري $\sigma = 10$ ورغبنا في اختبار الفرضية $H_0: \mu = 100$ مقابل الفرضية البديلة $H_1: \mu = 110$، فكم يجب أن يكون حجم العينة n إذا كان احتمال قبول H_0 عندما تكون H_1 صحيحة هو 0.02 واستخدمنا منطقة رفض حجمها 0.05؟

٦- باستخدام تمهيد نيمان - بيرسون برهن أن أفضل منطقة رفض لاختبار الفرضية $H_0: \sigma = \sigma_0$ مقابل الفرضية $H_1: \sigma = \sigma_1 > \sigma_0$ لتوزيع طبيعي متوسطه $\mu = 0$ هي أن نرفض H_0 عندما يكون $\sum_{1}^{n} x_i^2 > c$ حيث c عدد ثابت مناسب.

٧- أوجد عبارة للكمية λ في اختبار نسبة الإمكانية وذلك عند اختبار $H_0: \mu = \mu_0$ في توزيع بواسون. هل ستستخدم λ كإحصاء لاختبار H_0 إذا كنت تعلم أن μ إما أن تكون مساوية للمقدار μ_0 أو للمقدار μ_1؟

٨- إذا كان X يتبع التوزيع الطبيعي $N(0,\ \sigma^2)$، أوجد عبارة λ في اختبار نسبة الإمكانية للفرضية $H_0: \sigma = 1$.

٩- حل التمرين ٨ إذا كان متوسط X هو μ بدلا من 0 حيث قيمة μ مجهولة.

١٠- أوجد اختبار نسبة إمكانية للفرضية $H_0:\ \theta = 1$ علما أن $f(x,\ \theta) = \theta\ e^{-\theta x}$، $x \geq 0$. استمر في الحل حتى مرحلة الحصول على λ كدالة في $\bar{x}$.

١١- لديك التباينات الخمسة التالية كل منها محسوب من عينة حجمها $n = 10$ مأخوذة من خمسة مجتمعات. اختبر فرضية أن التباينات للمجتمعات الخمسة متساوية. افترض أن المجتمعات طبيعية وأن قيم تباينات العينات هي 22، 40، 30، 32و 12.

١٢- مفترضا أن $2\ log\ \lambda$ - يتبع بصورة تقريبية التوزيع χ^2 بدرجة واحدة من الحرية في اختبار نسبة الإمكانية في التمرين (١٠). مستخدما نتيجتك في التمرين (١٠) والقيم التالية لعينة : 1.5 ، 2 ، 0.8 ، 1.3 ، 2.8 ، 0.9 ، 1.6 ، 0.6 ، 4.2 ، 3.1 ، 1.4 ، 2.2 ، 0.7 ، 1.6 و 0.8 ، اختبر الفرضية $H_0: \theta = 1$.

١٣- يريد قسم الأمن والسلامة في مصنع معرفة ما إذا كان الزمن اللازم لاستكمال الحارس الليلي لجولته المعتادة هو 30 دقيقة. وفي عينة عشوائية من 32 جولة كان المتوسط 30.8 دقيقة بانحراف معياري 1.5. حدّد عند مستوى الأهمية $\alpha = 0.01$ ما إذا كانت هذه النتيجة تقدم دلالة كافية لرفض الفرضية الابتدائية $\mu = 30$ دقيقة وذلك في مقابل الفرضية البديلة $\mu \neq 30$.

١٤- بينت خمسة قياسات لمحتوى سيجارة من القطران الأرقام التالية : 14.5 ، 14.2 ، 14.4 ، 14.3 ، و14.6 ملّجم/ سيجارة. بيّن أنه يجب رفض الفرضية $\mu = 14.0$ عند المستوى $\alpha = 0.05$ والأخذ بالفرضية البديلة $\mu \neq 14.0$. افترض أن البيانات عينة عشوائية من توزيع طبيعي.

١٥- لنفرض أن عينة عشوائية من توزيع طبيعي بتباين معروف σ^2 ستُستخدم لاختبار الفرضية $\mu = \mu_0$ في مقابل الفرضية البديلة $\mu = \mu_1$ حيث $\mu_1 > \mu_0$ ، وأن احتمالات الخطأين من النوع الأول ومن النوع الثاني محددين سلفا عند القيم α وβ ، على الترتيب ، بيّن أن حجم العينة المطلوب هو :

$$n = \frac{\sigma^2 (Z_\alpha + Z_\beta)^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$

استخدم هذه الصيغة لإيجاد n عندما يكون $\sigma = 9$ ، $\mu_0 = 15$ ، $\mu_1 = 20$ ، $\alpha = .05$ و $\beta = 0.01$.

١٦- في دراسة لمدى فعالية مجموعة من التمارين في تخفيف الوزن/باوند، قام فريق من 16 شخصا بتنفيذ هذه التمارين لمدة شهر وكانت النتائج كما يلي:

الوزن من قبل	الوزن من بعد	الوزن من قبل	الوزن من بعد
211	198	172	166
180	173	155	154
171	172	185	181
214	209	167	164
182	179	203	201
194	192	181	175
160	161	245	233
182	182	146	142

اختبر عند مستوى الأهمية $\alpha = 0.05$ الفرضية $\mu_1-\mu_2 = 0$ في مقابل البديل $\mu_1-\mu_2 > 0$. افترض أن الفروق تتبع التوزيع الطبيعي.

١٧- في عينة عشوائية كان الانحراف المعياري لأوزان 24 عجلا من عمر معين هو $s = 238$ باوند. مفترضا أن الأوزان هي عينة عشوائية من توزيع طبيعي اختبر الفرضية الابتدائية $\sigma = 250$ باوند في مقابل الفرضية ذات الجانبين $\sigma \neq 250$ باوند عند مستوى الأهمية $\alpha = 0.01$.

١٨- فيما يلي درجات لاختبار الشخصية في عينتين تتضمن الأولى، 9 نساء عازبات وتتضمن الثانية 9 نساء متزوجات:

العازبات	88	68	77	82	63	80	78	71	72
المتزوجات	73	77	67	74	74	64	71	71	72

مفترضين أنه يمكن اعتبار البيانات عينتين مستقلتين من مجتمعين طبيعيين. اختبر الفرضية $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ضد البديل $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ عند المستوى $\alpha = 0.05$ (σ_1^2 و σ_2^2 يشيران إلى تبايني المجتمعين).

١٩- بيّن أنه في حالة مجتمعين يتبعان التوزيع الثنائي بمعلمتين θ_1، θ_2 يمكن اختبار الفرضية $\theta_1 = \theta_2$ باستخدام إحصاء الاختبار:

$$Z = \frac{\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}}{\sqrt{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

حيث $\hat{\theta} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$ ، x_i وn_i ، $i = 1,2$ هما عدد النجاحات وحجم العينة ، على الترتيب ، في عينتين مستقلتين ، مستخدمين تقريب التوزيع الثنائي بالتوزيع الطبيعي.

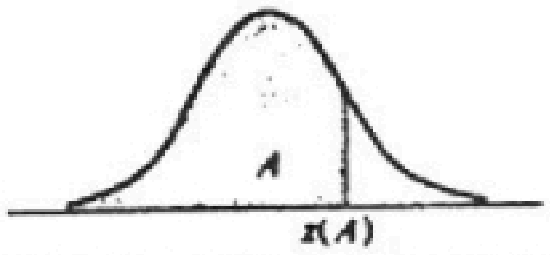
٢٠- يزعم صانع لمزيل البقع أن منتجه يزيل 90 بالمائة ، على الأقل ، من كافة أنواع البقع. ماذا يمكن أن نستنتج حول هذا الزعم عند مستوى الأهمية $\alpha = 0.05$ إذا أزال هذا المُنتج 174 بقعة فقط من أصل 200 بقعة اختيرت عشوائيا من بين الثياب الواردة إلى محل للتنظيف على الناشف؟

٢١- في عينة عشوائية من 200 شخص لم يتناولوا وجبة إفطار أفاد 82 منهم بالشعور بالتعب بعد ضحى ذلك اليوم. وفي عينة عشوائية من 400 شخص تناولوا إفطارا أفاد 116 منهم بالشعور بالتعب بعد وقت الضحى. استخدم التمرين (١٩) لاختبار فرضية عدم وجود فرق مهم بين نسبتي من يشعرون بالتعب في المجتمعين المذكورين في مقابل فرضية أن الشعور بالتعب أكثر حدوثا بين من لا يتناولون وجبة الإفطار ، وذلك عند مستوى الأهمية $\alpha = 0.05$.

الجداول الإحصائية

جدول رقم (١). التوزيع الطبيعي المعياري

العدد في صلب الجدول يمثل المساحة A تحت المنحنى الطبيعي المعياري من ∞- إلى Z(A) .



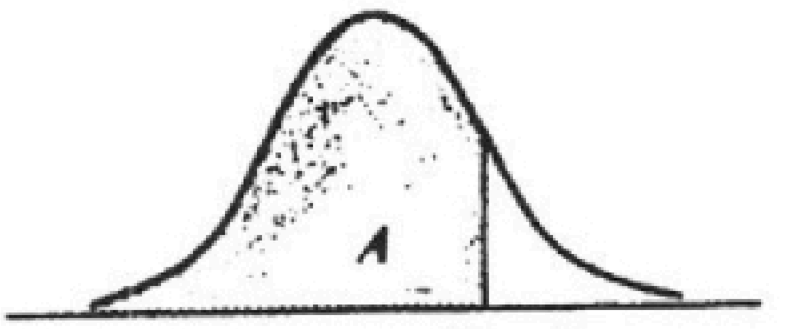
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

مئينات مختارة

الاحتمال المجمع	A:	.90	.95	.975	.98	.99	.995	.999
	z(A):	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	3.090

جدول رقم (٢). التوزيع ستيودينت (t)

العدد في صلب الجدول يمثل $t(A;\nu)$ حيث $A = P\{t(v) \le t(A;v)\}$



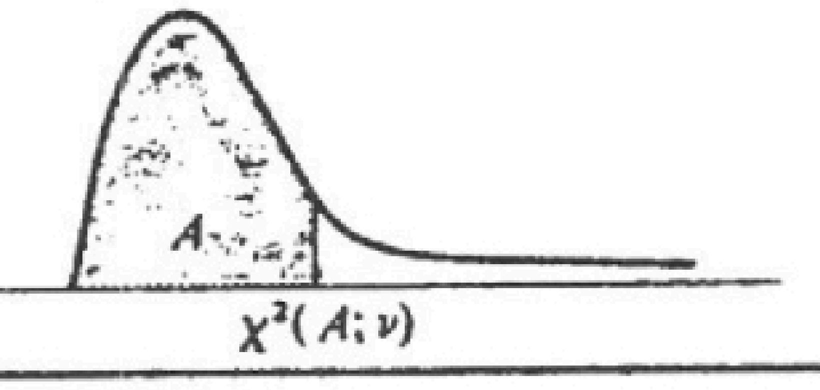
ν	.60	.70	.80	.85	.90	.95	.975
1	0.325	0.727	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706
2	0.289	0.617	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303
3	0.277	0.584	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182
4	0.271	0.569	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776
5	0.267	0.559	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571
6	0.265	0.553	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447
7	0.263	0.549	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365
8	0.262	0.546	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306
9	0.261	0.543	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262
10	0.260	0.542	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228
11	0.260	0.540	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201
12	0.259	0.539	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179
13	0.259	0.537	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160
14	0.258	0.537	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145
15	0.258	0.536	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131
16	0.258	0.535	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120
17	0.257	0.534	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110
18	0.257	0.534	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101
19	0.257	0.533	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093
20	0.257	0.533	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086
21	0.257	0.532	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080
22	0.256	0.532	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074
23	0.256	0.532	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069
24	0.256	0.531	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064
25	0.256	0.531	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060
26	0.256	0.531	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056
27	0.256	0.531	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052
28	0.256	0.530	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048
29	0.256	0.530	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045
30	0.256	0.530	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042
40	0.255	0.529	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021
60	0.254	0.527	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000
120	0.254	0.526	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980
∞	0.253	0.524	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960

تابع جدول رقم (٢)

ν	A						
	.98	.985	.99	.9925	.995	.9975	.9995
1	15.895	21.205	31.821	42.434	63.657	127.322	636.590
2	4.849	5.643	6.965	8.073	9.925	14.089	31.598
3	3.482	3.896	4.541	5.047	5.841	7.453	12.924
4	2.999	3.298	3.747	4.088	4.604	5.598	8.610
5	2.757	3.003	3.365	3.634	4.032	4.773	6.869
6	2.612	2.829	3.143	3.372	3.707	4.317	5.959
7	2.517	2.715	2.998	3.203	3.499	4.029	5.408
8	2.449	2.634	2.896	3.085	3.355	3.833	5.041
9	2.398	2.574	2.821	2.998	3.250	3.690	4.781
10	2.359	2.527	2.764	2.932	3.169	3.581	4.587
11	2.328	2.491	2.718	2.879	3.106	3.497	4.437
12	2.303	2.461	2.681	2.836	3.055	3.428	4.318
13	2.282	2.436	2.650	2.801	3.012	3.372	4.221
14	2.264	2.415	2.624	2.771	2.977	3.326	4.140
15	2.249	2.397	2.602	2.746	2.947	3.286	4.073
16	2.235	2.382	2.583	2.724	2.921	3.252	4.015
17	2.224	2.368	2.567	2.706	2.898	3.222	3.965
18	2.214	2.356	2.552	2.689	2.878	3.197	3.922
19	2.205	2.346	2.539	2.674	2.861	3.174	3.883
20	2.197	2.336	2.528	2.661	2.845	3.153	3.849
21	2.189	2.328	2.518	2.649	2.831	3.135	3.819
22	2.183	2.320	2.508	2.639	2.819	3.119	3.792
23	2.177	2.313	2.500	2.629	2.807	3.104	3.768
24	2.172	2.307	2.492	2.620	2.797	3.091	3.745
25	2.167	2.301	2.485	2.612	2.787	3.078	3.725
26	2.162	2.296	2.479	2.605	2.779	3.067	3.707
27	2.158	2.291	2.473	2.598	2.771	3.057	3.690
28	2.154	2.286	2.467	2.592	2.763	3.047	3.674
29	2.150	2.282	2.462	2.586	2.756	3.038	3.659
30	2.147	2.278	2.457	2.581	2.750	3.030	3.646
40	2.123	2.250	2.423	2.542	2.704	2.971	3.551
60	2.099	2.223	2.390	2.504	2.660	2.915	3.460
120	2.076	2.196	2.358	2.468	2.617	2.860	3.373
∞	2.054	2.170	2.326	2.432	2.576	2.807	3.291

جدول رقم (٣). التوزيع (χ^2)

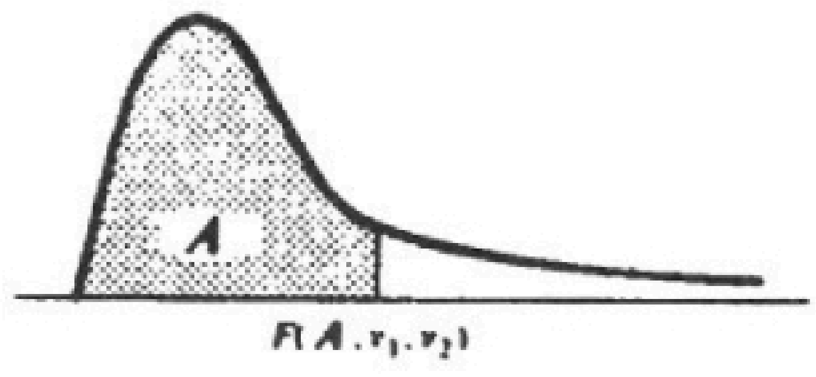
العدد في صلب الجدول يمثل $\chi^2(A;\nu)$ حيث $P\left\{\chi^2(v) \le \chi^2(A;v)\right\} = A$



ν	A = .005	.010	.025	.050	.100	.900	.950	.975	.990	.995
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	0.0158	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2

جدول رقم (٤). التوزيع (F)

العدد في صلب الجدول يمثل $\mathbf{F(A;}\nu_1,\nu_2\mathbf{)}$ حيث $P\left\{F(v_1,v_2)\le\chi^2(A;v_1,v_2)\right\}=A$



$$F(A;v_1,v_2)=\frac{1}{F(1-A;v_2,v_1)}$$

د.ح المقام	A	د.ح البسط: 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	.50	1.00	1.50	1.71	1.82	1.89	1.94	1.98	2.00	2.03
	.90	39.9	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	58.9	59.4	59.9
	.95	161	200	216	225	230	234	237	239	241
	.975	648	800	864	900	922	937	948	957	963
	.99	4,052	5,000	5,403	5,625	5,764	5,859	5,928	5,981	6,022
	.995	16,211	20,000	21,615	22,500	23,056	23,437	23,715	23,925	24,091
	.999	405,280	500,000	540,380	562,500	576,400	585,940	592,870	598,140	602,280
2	.50	0.667	1.00	1.13	1.21	1.25	1.28	1.30	1.32	1.33
	.90	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38
	.95	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4
	.975	38.5	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4
	.99	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4
	.995	199	199	199	199	199	199	199	199	199
	.999	998.5	999.0	999.2	999.2	999.3	999.3	999.4	999.4	999.4
3	.50	0.585	0.881	1.00	1.06	1.10	1.13	1.15	1.16	1.17
	.90	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24
	.95	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
	.975	17.4	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.5
	.99	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3
	.995	55.6	49.8	47.5	46.2	45.4	44.8	44.4	44.1	43.9
	.999	167.0	148.5	141.1	137.1	134.6	132.8	131.6	130.6	129.9
4	.50	0.549	0.828	0.941	1.00	1.04	1.06	1.08	1.09	1.10
	.90	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94
	.95	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
	.975	12.2	10.6	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90
	.99	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7
	.995	31.3	26.3	24.3	23.2	22.5	22.0	21.6	21.4	21.1
	.999	74.1	61.2	56.2	53.4	51.7	50.5	49.7	49.0	48.5
5	.50	0.528	0.799	0.907	0.965	1.00	1.02	1.04	1.05	1.06
	.90	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32
	.95	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
	.975	10.0	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68
	.99	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2
	.995	22.8	18.3	16.5	15.6	14.9	14.5	14.2	14.0	13.8
	.999	47.2	37.1	33.2	31.1	29.8	28.8	28.2	27.6	27.2

تابع جدول رقم (٤)

د.ح المقام	A	د.ح البسط: 1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	.50	0.515	0.780	0.886	0.942	0.977	1.00	1.02	1.03	1.04
	.90	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96
	.95	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
	.975	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52
	.99	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
	.995	18.6	14.5	12.9	12.0	11.5	11.1	10.8	10.6	10.4
	.999	35.5	27.0	23.7	21.9	20.8	20.0	19.5	19.0	18.7
7	.50	0.506	0.767	0.871	0.926	0.960	0.983	1.00	1.01	1.02
	.90	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72
	.95	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
	.975	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82
	.99	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
	.995	16.2	12.4	10.9	10.1	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51
	.999	29.2	21.7	18.8	17.2	16.2	15.5	15.0	14.6	14.3

د.ح المقام	A	د.ح البسط: 10	12	15	20	24	30	60	120	∞
1	.50	2.04	2.07	2.09	2.12	2.13	2.15	2.17	2.18	2.20
	.90	60.2	60.7	61.2	61.7	62.0	62.3	62.8	63.1	63.3
	.95	242	244	246	248	249	250	252	253	254
	.975	969	977	985	993	997	1,001	1,010	1,014	1,018
	.99	6,056	6,106	6,157	6,209	6,235	6,261	6,313	6,339	6,366
	.995	24,224	24,426	24,630	24,836	24,940	25,044	25,253	25,359	25,464
	.999	605,620	610,670	615,760	620,910	623,500	626,100	631,340	633,970	636,620
2	.50	1.34	1.36	1.38	1.39	1.40	1.41	1.43	1.43	1.44
	.90	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.48	9.49
	.95	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
	.975	39.4	39.4	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5
	.99	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
	.995	199	199	199	199	199	199	199	199	200
	.999	999.4	999.4	999.4	999.4	999.5	999.5	999.5	999.5	999.5
3	.50	1.18	1.20	1.21	1.23	1.23	1.24	1.25	1.26	1.27
	.90	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.15	5.14	5.13
	.95	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.57	8.55	8.53
	.975	14.4	14.3	14.3	14.2	14.1	14.1	14.0	13.9	13.9
	.99	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.3	26.2	26.1
	.995	43.7	43.4	43.1	42.8	42.6	42.5	42.1	42.0	41.8
	.999	129.2	128.3	127.4	126.4	125.9	125.4	124.5	124.0	123.5
4	.50	1.11	1.13	1.14	1.15	1.16	1.16	1.18	1.18	1.19
	.90	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.79	3.78	3.76
	.95	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.69	5.66	5.63
	.975	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.36	8.31	8.26
	.99	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.6	13.5
	.995	21.0	20.7	20.4	20.2	20.0	19.9	19.6	19.5	19.3
	.999	48.1	47.4	46.8	46.1	45.8	45.4	44.7	44.4	44.1
5	.50	1.07	1.09	1.10	1.11	1.12	1.12	1.14	1.14	1.15
	.90	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.14	3.12	3.11
	.95	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.43	4.40	4.37
	.975	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.12	6.07	6.02
	.99	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.20	9.11	9.02
	.995	13.6	13.4	13.1	12.9	12.8	12.7	12.4	12.3	12.1
	.999	26.9	26.4	25.9	25.4	25.1	24.9	24.3	24.1	23.8

تابع الجدول رقم (٤)

د.ح المقام		د.ح البسط 10	12	15	20	24	30	60	120	∞
6	.50	1.05	1.06	1.07	1.08	1.09	1.10	1.11	1.12	1.12
	.90	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.76	2.74	2.72
	.95	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.74	3.70	3.67
	.975	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	4.96	4.90	4.85
	.99	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.06	6.97	6.88
	.995	10.2	10.0	9.81	9.59	9.47	9.36	9.12	9.00	8.88
	.999	18.4	18.0	17.6	17.1	16.9	16.7	16.2	16.0	15.7
7	.50	1.03	1.04	1.05	1.07	1.07	1.08	1.09	1.10	1.10
	.90	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.51	2.49	2.47
	.95	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.30	3.27	3.23
	.975	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.25	4.20	4.14
	.99	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.82	5.74	5.65
	.995	8.38	8.18	7.97	7.75	7.65	7.53	7.31	7.19	7.08
	.999	14.1	13.7	13.3	12.9	12.7	12.5	12.1	11.9	11.7

د.ح المقام		د.ح البسط 1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	.50	0.499	0.757	0.860	0.915	0.948	0.971	0.988	1.00	1.01
	.90	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56
	.95	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
	.975	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36
	.99	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
	.995	14.7	11.0	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34
	.999	25.4	18.5	15.8	14.4	13.5	12.9	12.4	12.0	11.8
9	.50	0.494	0.749	0.852	0.906	0.939	0.962	0.978	0.990	1.00
	.90	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44
	.95	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
	.975	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03
	.99	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
	.995	13.6	10.1	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54
	.999	22.9	16.4	13.9	12.6	11.7	11.1	10.7	10.4	10.1
10	.50	0.490	0.743	0.845	0.899	0.932	0.954	0.971	0.983	0.992
	.90	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35
	.95	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
	.975	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78
	.99	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
	.995	12.8	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97
	.999	21.0	14.9	12.6	11.3	10.5	9.93	9.52	9.20	8.96
12	.50	0.484	0.735	0.835	0.888	0.921	0.943	0.959	0.972	0.981
	.90	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21
	.95	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
	.975	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44
	.99	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
	.995	11.8	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20
	.999	18.6	13.0	10.8	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.48
15	.50	0.478	0.726	0.826	0.878	0.911	0.933	0.949	0.960	0.970
	.90	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09
	.95	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
	.975	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12
	.99	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
	.995	10.8	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54
	.999	16.6	11.3	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.26

تابع الجدول رقم (٤)

د.ح المقام	A	د.ح البسط 1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	.50	0.472	0.718	0.816	0.868	0.900	0.922	0.938	0.950	0.959
	.90	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96
	.95	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
	.975	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84
	.99	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
	.995	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96
	.999	14.8	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.24
24	.50	0.469	0.714	0.812	0.863	0.895	0.917	0.932	0.944	0.953
	.90	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91
	.95	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
	.975	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70
	.99	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
	.995	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.99	3.83	3.69
	.999	14.0	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.80

د.ح المقام	A	د.ح البسط 10	12	15	20	24	30	60	120	∞
8	.50	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08	1.08	1.09
	.90	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.34	2.32	2.29
	.95	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.01	2.97	2.93
	.975	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.78	3.73	3.67
	.99	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.03	4.95	4.86
	.995	7.21	7.01	6.81	6.61	6.50	6.40	6.18	6.06	5.95
	.999	11.5	11.2	10.8	10.5	10.3	10.1	9.73	9.53	9.33
9	.50	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.05	1.07	1.07	1.08
	.90	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.21	2.18	2.16
	.95	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.79	2.75	2.71
	.975	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.45	3.39	3.33
	.99	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.48	4.40	4.31
	.995	6.42	6.23	6.03	5.83	5.73	5.62	5.41	5.30	5.19
	.999	9.89	9.57	9.24	8.90	8.72	8.55	8.19	8.00	7.81
10	.50	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.06	1.07
	.90	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.11	2.08	2.06
	.95	2.98	2.91	2.84	2.77	2.74	2.70	2.62	2.58	2.54
	.975	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.20	3.14	3.08
	.99	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.08	4.00	3.91
	.995	5.85	5.66	5.47	5.27	5.17	5.07	4.86	4.75	4.64
	.999	8.75	8.45	8.13	7.80	7.64	7.47	7.12	6.94	6.76
12	.50	0.989	1.00	1.01	1.02	1.03	1.03	1.05	1.05	1.06
	.90	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.96	1.93	1.90
	.95	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.38	2.34	2.30
	.975	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.85	2.79	2.72
	.99	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.54	3.45	3.36
	.995	5.09	4.91	4.72	4.53	4.43	4.33	4.12	4.01	3.90
	.999	7.29	7.00	6.71	6.40	6.25	6.09	5.76	5.59	5.42
15	.50	0.977	0.989	1.00	1.01	1.02	1.02	1.03	1.04	1.05
	.90	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.82	1.79	1.76
	.95	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.16	2.11	2.07
	.975	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.52	2.46	2.40
	.99	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.05	2.96	2.87
	.995	4.42	4.25	4.07	3.88	3.79	3.69	3.48	3.37	3.26
	.999	6.08	5.81	5.54	5.25	5.10	4.95	4.64	4.48	4.31

تابع الجدول رقم (٤)

د.ح المقام	A	د.ح البسط 10	12	15	20	24	30	60	120	∞
20	.50	0.966	0.977	0.989	1.00	1.01	1.01	1.02	1.03	1.03
	.90	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.68	1.64	1.61
	.95	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.95	1.90	1.84
	.975	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.22	2.16	2.09
	.99	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.61	2.52	2.42
	.995	3.85	3.68	3.50	3.32	3.22	3.12	2.92	2.81	2.69
	.999	5.08	4.82	4.56	4.29	4.15	4.00	3.70	3.54	3.38
24	.50	0.961	0.972	0.983	0.994	1.00	1.01	1.02	1.02	1.03
	.90	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.61	1.57	1.53
	.95	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.84	1.79	1.73
	.975	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.08	2.01	1.94
	.99	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.40	2.31	2.21
	.995	3.59	3.42	3.25	3.06	2.97	2.87	2.66	2.55	2.43
	.999	4.64	4.39	4.14	3.87	3.74	3.59	3.29	3.14	2.97

د.ح المقام	A	د.ح البسط 1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	.50	0.466	0.709	0.807	0.858	0.890	0.912	0.927	0.939	0.948
	.90	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85
	.95	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
	.975	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57
	.99	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
	.995	9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45
	.999	13.3	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.39
60	.50	0.461	0.701	0.798	0.849	0.880	0.901	0.917	0.928	0.937
	.90	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74
	.95	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
	.975	5.29	3.93	3.34	3.C.	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33
	.99	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
	.995	8.49	5.80	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01
	.999	12.0	7.77	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.86	3.69
120	.50	0.458	0.697	0.793	0.844	0.875	0.896	0.912	0.923	0.932
	.90	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68
	.95	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96
	.975	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22
	.99	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56
	.995	8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81
	.999	11.4	7.32	5.78	4.95	4.42	4.04	3.77	3.55	3.38
∞	.50	0.455	0.693	0.789	0.839	0.870	0.891	0.907	0.918	0.927
	.90	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63
	.95	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88
	.975	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11
	.99	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41
	.995	7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62
	.999	10.8	6.91	5.42	4.62	4.10	3.74	3.47	3.27	3.10

تابع الجدول رقم (٤)

د.ح المقام	1	10	12	15	20	24	30	60	120	∞
		د.ح البسط								
30	.50	0.955	0.966	0.978	0.989	0.994	1.00	1.01	1.02	1.02
	.90	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.54	1.50	1.46
	.95	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.74	1.68	1.62
	.975	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	1.94	1.87	1.79
	.99	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.21	2.11	2.01
	.995	3.34	3.18	3.01	2.82	2.73	2.63	2.42	2.30	2.18
	.999	4.24	4.00	3.75	3.49	3.36	3.22	2.92	2.76	2.59
60	.50	0.945	0.956	0.967	0.978	0.983	0.989	1.00	1.01	1.01
	.90	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.40	1.35	1.29
	.95	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.53	1.47	1.39
	.975	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.67	1.58	1.48
	.99	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.84	1.73	1.60
	.995	2.90	2.74	2.57	2.39	2.29	2.19	1.96	1.83	1.69
	.999	3.54	3.32	3.08	2.83	2.69	2.55	2.25	2.08	1.89
120	.50	0.939	0.950	0.961	0.972	0.978	0.983	0.994	1.00	1.01
	.90	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.32	1.26	1.19
	.95	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.43	1.35	1.25
	.975	2.16	2.05	1.95	1.82	1.76	1.69	1.53	1.43	1.31
	.99	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.66	1.53	1.38
	.995	2.71	2.54	2.37	2.19	2.09	1.98	1.75	1.61	1.43
	.999	3.24	3.02	2.78	2.53	2.40	2.26	1.95	1.77	1.54
∞	.50	0.934	0.945	0.956	0.967	0.972	0.978	0.989	0.994	1.00
	.90	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.24	1.17	1.00
	.95	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.32	1.22	1.00
	.975	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.39	1.27	1.00
	.99	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.47	1.32	1.00
	.995	2.52	2.36	2.19	2.00	1.90	1.79	1.53	1.36	1.00
	.999	2.96	2.74	2.51	2.27	2.13	1.99	1.66	1.45	1.00

المراجع

المراجع العربية

كنجو، أنيس. *الإحصاء الرياضي*. سوريا: جامعة دمشق، ١٩٧٩م.

المراجع الأجنبية

Guenther, W.C. *Concept of Statistical Inference, second Ed.* McGraw-Hill Kogakusha, ltd, 1973.

Hoel, P.G. *Introduction to Mathematical Statistics, Fifth Ed.* New York: John Wiley& Sons Inc, 1984.

Hogg, R. and Craig, A.T. *Introduction to Mathematical Statistics*, *Fourth Ed.* New York: Macmillan Publishing Company, 1978. and Elliot, T. *Probability and Statistical Inference, third Ed.* New York: Macmillan Publishing Company, 1988.

Larson, H.J. *Introduction to Probability and Statistics*. New York: John Wiley & Sons, 1973.

Lehmann, E.L. *Testing Statistical Hypotheses, Second Ed.* New York: John Wiley & Sons, 1959.

Mood, A.M.; Graybill, F.A. and Boes, D.C. *Introduction to the theory of Statistics, third Ed*. McGraw-Hill Company, 1974.

Rohatgi,V. *Statistical Inference*. New York: John Wiley & Sons. 1984.

ثبت المصطلحات

- عربي – إنجليزي
- إنجليزي – عربي

أولا: عربي – إنجليزي

أ

اتّساق	Consistency
إحصاء	Statistics
اختبار	Test statistics
كاف	Sufficient statistics
الاختبار الأكثر قوة بانتظام	Uniform most powerful test
اختبار فرضيات	Hypothesis test
نسبة الإمكانية	Likelihood ratio test
المعممة	Generalized likelihood ratio test
ارتباط	Correlation
التواء	Skewness
انحراف معياري	Standard deviation

ت

تباين	Variance
أصغري	Minimized variance
تغاير	Covariance
تفلطح	Skewness
تقديرات بايز	Bayes estimation
تقدير الإمكانية العظمى	Maximum likelihood estimation
بفترة	Interval estimation
نقطي	Point estimation
تكرار	Frequency
نسبي	Relative frequency
توزيع احتمالي	Probability distribution
أسي	Exponential distribution
باريتو	Pareto distribution
باسكال (الهندسي)	Pascal (geometric) distribution
بواسون	Poisson distribution
بيتا	Beta distribution
بيرنوللي	Bernolli distribution
ثنائي (ذي الحدين)	Binomial distribution
جاما	Gamma distribution
رايلي	Rayleigh distribution

ستيودنت	Student distribution
سلفي (سابق)	Prior distribution
طبيعي	Normal distribution
فوق هندسي	Hybergeometric distribution
كوشي	Cauchy distribution
لاحق	Posterior distribution
مربع كاي	Chi-square distribution
منتظم	Uniform distribution
هامشي	Marginal distribution
ويبل	Weibull distribution
F	F-distribution
t	t-distribution
توقع	Expectation
شرطي	Conditional distribution

ح

حجم الخطأ	Error size

خ

خاصية الانتظام	Uniform property
خطأ تقدير	Estimation error
معياري	Standard error
من النوع الأول	Type one error
الثاني	Type two error

د

دالة احتمال	Probability function
الإمكانية	Likelihood function
خسارة	Loss function
خطأ تربيعي	Square error function
شرطية	Conditional function
قرار	Decision function
قوة	Power function
كثافة	Density function
متزايدة	Increasing function
متناقصة	Decreasing function
مخاطرة	Risk function
مشتركة	Joint function
مولّدة للعزوم	Moments generating function
هامشية	Marginal function
درجات الحرية	Degrees of freedom

ع

عزم حول الصفر	Moment about zero
عاملي	Factorial moment
عينة	Sample moment
خام	Raw sample moment

Central moment	مركزي
Moments	عزوم
Raw moments	خام
Sample	عينة

غ

Unbiased	غير منحاز

ف

Multiple confidence intervals	فترات ثقة متعددة
Confidence interval	فترة ثقة
Elementary hypothesis	فرضية ابتدائية
Statistical hypothesis	إحصائية
Alternative hypothesis	بديلة
Simple hypothesis	بسيطة
Composite hypothesis	مركبة
Decision space	فضاء القرار
Parameters space	المعالم
Sampling space	المعاينة
Efficient estimation	فعّالية تقدير
Efficient estimator	مقدر

ق

Law of large number	قانون الأعداد الكبيرة

Power of the test	قوة الاختبار
P-value	القيمة-P

ك

Sufficiency	الكفاية

م

Chebyshev's inequality	متباينة تشيبيشيف
Cramer-Rao inequality	كرامير- راو
Random vector	متجه عشوائي
Markov inequality	متراجحة ماركوف
Mean	متوسط
Mean squares error	مربعات الخطأ
Bayes risk	مخاطرة بايز
Least squares	مربعات صغرى
Correlation coefficient	معامل ارتباط
Confidence coefficient	ثقة
Random sampling	معاينة عشوائية
Parameter	معلمة
Information about parameter	معلومات حول معلمة
Estimator	مقدِّر
Maximum likelihood estimator	الإمكانية العظمى
Moments estimator	العزوم

غير منحاز	Unbiased estimator
فعّال	Effective estimator
متّسق	Consistence estimator
منحاز	Biased estimator
منحنى انحدار	Regression curve
منطقة ثقة	Confidence region
حرجة	Critical region
رفض	Rejection region
قبول	Acceptance region
موثوقية	Reliability

ن

نظرية القرار	Decision theory
نقص التناظر	Lack of symmetric
نيمان – بيرسون	Neyman-Pearson

و

الوحدانية	Uniqueness

ثانيا: إنجليزي عربي

A

Acceptance region	منطقة قبول
Alternative hypothesis	فرضية بديلة

B

Bayes estimation	تقديرات بايز
risk	مخاطرة بايز
Bernolli distribution	توزيع بيرنوللي
Beta distribution	التوزيع بيتا
Biased estimator	مقدِّر منحاز
Binomial distribution	التوزيع الثنائي (ذي الحدين)

C

Cauchy distribution	توزيع كوشي
Central limit theorem	نظرية النهاية المركزية
Central moment	عزم مركزي
Chebyshev's inequality	متباينة تشيبيشيف
Chi square distribution	توزيع مربع كاي
Composite hypothesis	فرضية مركبة
Conditional distribution	توقع شرطي
function	دالة شرطية
Confidence coefficient	معامل ثقة

interval	فترة ثقة
region	منطقة ثقة
Consistence estimator	مقدر متّسق
Consistency	الاتّساق
Correlation	ارتباط
coefficient	معامل ارتباط
Covariance	تغاير
Cramer-Raw inequality	متباينة كرامير- راو
Critical region	منطقة حرجة

D

Decision function	دالة قرار
space	فضاء القرار
theory	نظرية القرار
Decreasing function	دالة متناقصة
Degrees of freedom	درجات حرية
Density function	دالة كثافة

E

Efficiency	فعالية
Efficient estimation	فعالية تقدير
estimator	فعالية مقدر/ مقدرا فعالا
Elementary hypothesis	فرضية ابتدائية

حجم الخطأ	Error size
خطأ تقدير	Estimation eror
مقدِّر	Estimator
توقع	Expectation
توزيع أسي	Exponential distribution

F

التوزيع F	F-distribution
تكرار	Frequency
دالة في متغير عشوائي	Function of random variable
توزيع دالة في المتغير العشوائي	distribution

G

توزيع جاما	Gamma distribution
اختبار نسبة الإمكانية المعممة	Generalized likelihood ratio test

H

توزيع فوق هندسي	Hybergeometric distribution
اختبار فرضيات	Hypothesis test

I

دالة متزايدة	Increasing function
معلومات حول معلمة	Information about parameter
تقدير بفترة	Interval estimation

J

دالة مشتركة	Joint function

K

Kurtosis	تفلطح

L

Lack of symmetric	نقص التناظر
Law of large number	قانون الأعداد الكبيرة
Least squares	مربعات صغرى
Likelihood function	دالة الإمكانية
ratio test	اختبار نسبة الإمكانية
Loss function	دالة خسارة

M

Marginal distribution	توزيع هامشي
function	دالة هامشية
Markov inequality	متراجحة ماركوف
Maximum likelihood estimation	تقدير الإمكانية العظمى
estimator	مقدِّر الإمكانية العظمى
Mean	متوسط
squares error	متوسط مربعات الخطأ
Minimum variance	تباين أصغري
Moments	عزوم
estimator	مقدِّر العزوم
generating function	دالة مولِّدة للعزوم

Multiple confidence intervals	فترات ثقة متعددة

N

Neyman-Pearson	نيمان – بيرسون
Normal distribution	توزيع طبيعي

P

Parameter	معلمة
Parameters space	فضاء المعالم
Pareto distribution	لتوزيع باريتو
Pascal (geometric) distribution	توزيع باسكال (الهندسي
Point estimation	تقدير نقطي
Poisson distribution	توزيع بواسون
Posterior distribution	توزيع لاحق
Power function	دالة قوة
of the test	قوة الاختبار
Prior distribution	توزيع سلفي (سابق)
Probability distribution	توزيع احتمالي
function	دالة احتمال
P-value	القيمة–P

R

Random sampling	معاينة عشوائية
vector	متجه عشوائي

Raw moments	عزوم خام
sample moment	عزم العينة الخام
Rayleigh distribution	توزيع رايلي
Regression	انحدار
Rejection region	منطقة رفض
Relative Frequency	تكرار نسبي
Reliability	موثوقية
Risk function	دالة مخاطرة

S

Sample	عينة
moment	عزم عينة
Sampling space	فضاء المعاينة
Simple hypothesis	فرضية بسيطة
Skewness	التواء
Square error function	دالة خطأ تربيعي
Standard deviation	انحراف معياري
error	خطأ معياري
Statistical hypothesis	فرضية إحصائية
Statistics	إحصاء
Student distribution	توزيع ستيودنت
Sufficiency	الكفاية

Sufficient statistics — إحصاء كاف

Sum of squares distribution — توزيع مجموع مربعات

T

T-distribution — التوزيع- t

Test statistics — إحصاء الاختبار

Type one error — خطأ من النوع الأول

two eror — خطأ من النوع الثاني

U

Unbiased — غير منحاز

Uniform distribution — توزيع منتظم

most powerful test — الاختبار الأكثر قوة بانتظام

property — خواص الانتظام

Uniqueness — الوحدانية

V

Variance — تباين

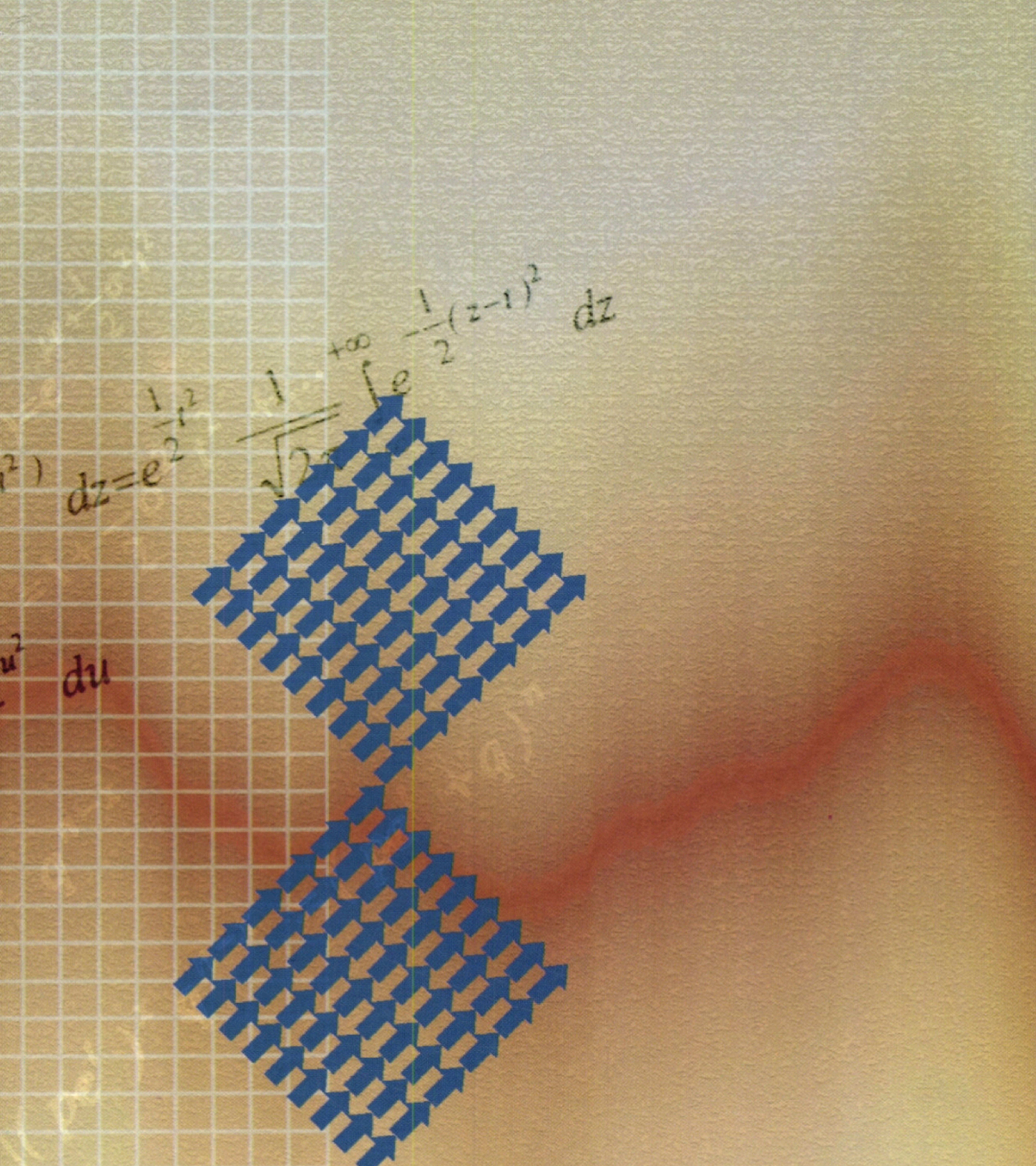
W

Weibull distribution — توزيع ويبل

كشاف الموضوعات

ن

و



ردمك : ۹۹٦۰-۳۷-۸٦٦-۷
ISBN : 9960-37-866-7